

Universidad de La Habana  
Facultad de Matemática y Computación



# Sobre la atomicidad de monoides potencia de monoides de Puiseux

Autor:

**Marcos Manuel Tirador Del Riego**

Tutores:

**Dr. Luis Ramiro Piñeiro Díaz**

**Dr. Felix Gotti**

Trabajo de Diploma  
presentado en opción al título de  
Licenciado en Ciencia de la Computación

5 de enero de 2024

*A mis padres y mi hermana*

# Agradecimientos

Me gustaría agradecer a todos los profesores y otros trabajadores de MatCom que pusieron su granito de arena en mi formación como licenciado en Ciencia de la Computación, en especial a Somoza, Carmen, Alberto, Idania, Cartaya, Fernando, Royland y mi tutor Luis Ramiro. También a los demás profesores que he tenido durante mi vida, especialmente a Evidio y María Elena.

Estoy muy agradecido con mis coautores por compartir este tiempo de investigación y por los valiosos descubrimientos que hicimos juntos.

Quiero agradecer también a mi tutor Luis Ramiro Piñeiro Díaz por todo el tiempo y esfuerzo que empleó en ayudarme a realizar el presente trabajo de diploma. Por su preocupación constante, sus numerosos consejos y su ayuda incondicional.

A todos mis amigos va mi más profunda gratitud. Ustedes son uno de los pilares de mi vida, los que hacen que todo lo demás tenga sentido, y por ende que esta tesis tenga sentido. Especiales agradecimientos para mis hermanos Tony, Jose Julián y Leandro. Gracias de nuevo Leandro por ser mi aliado en todas las batallas durante el transcurso de la carrera. Por ayudarme a crecer como profesional y como ser humano.

El agradecimiento más especial se lo dedico a mi tutor Felix Gotti. Por toda tu ayuda en la creación de esta tesis. Por introducirme en los mundos asombrosos del álgebra abstracta y de la investigación. Gracias por ayudarme a convertirme en el joven científico que soy hoy. Por todo el valioso tiempo que dedicaste estos 4 años a ser mi mentor, mi guía, mi tutor; por todos los valiosos consejos y por compartir tu vasta experiencia conmigo. Pero más que eso gracias por tu amistad, por tu cariño, por ver en mí algo más. Por siempre confiar en mí, hasta en los peores momentos.

Agradezco inmensamente a toda mi familia. Agradezco a mis tías Lily y Yamira por su apoyo constante. Agradezco a mis abuelos Mercedes, Héctor y Virginia por todo el amor que me dieron; que Dios los tenga en la gloria. Finalmente mi agradecimiento más grande va para mis padres: Francisco Manuel Tirador Arrazcaeta y Raisa Del Riego Alfonso, y a mi hermana Gabriela Tirador Del Riego. Ustedes son el *por qué* y el *para qué* de mi vida. No hay palabras suficientemente justas para describir mi agradecimiento por contar siempre con vuestro amor, confianza, apoyo, inspiración y educación. Gracias por todo el sacrificio que hicieron para que esto fuera posible.

Por último, gracias Dios por todo en mi vida.

# Opinión de los tutores

En su tesis de licenciatura, el estudiante Marcos Tirador no solo ha investigado cuestiones teóricas sobre la estructura atómica y las factorizaciones de los monoides potencia sino que también ha diseñado e implementado algoritmos eficientes para lograr el cómputo de fragmentos considerables de ciertos triángulos de Pascal correspondientes a las configuraciones atómicas de algunos de estos mismos monoides. Los resultados de su tesis de licenciatura expanden los horizontes teóricos y prácticos de las factorizaciones, mientras arrojan luz sobre ciertas propiedades atómicas bajo un elevado nivel de investigación actual y ayudan a corroborar una conjetura sobre la unimodalidad de las filas del triángulo de Pascal del conjunto de átomos del prototípico monoide potencia  $\mathcal{P}_{\text{fin},0}(\mathbb{N}_0)$ .

Los monoides conmutativos que son libres de torsión de rango 1 son conocidos como *monoides de Puiseux*: los submonoides aditivos del cono real no negativo comprenden todos los monoides reducidos de Puiseux (luego de identificar monoides que son isomorfos). Los monoides de Puiseux resultan ser objetos relevantes en el estudio de anillos de semigrupos conmutativos y álgebras conmutativas en general (véase, por ejemplo, [16] y [22]). El auge reciente que ha tenido la teoría de las factorizaciones y la expansión de la misma a monoides aditivos (por naturaleza) ha motivado recientemente una investigación abrupta de la atomicidad y las factorizaciones en monoides de Puiseux: la primera exploración sistemática en esta dirección se llevó a cabo en [15].

Dado un monoide (de Puiseux)  $M$ , podemos construir su *monoide potencia*  $\mathcal{P}_{\text{fin}}(M)$ , dígase, el conjunto de todos los subconjuntos finitos y no vacíos de  $M$  con respecto a la conocida suma de Minkowski. El *monoide potencia restringido* de  $M$ , denotado por  $\mathcal{P}_{\text{fin},0}(M)$ , es el submonoide de  $\mathcal{P}_{\text{fin}}(M)$  que está formado por todos los subconjuntos finitos de  $M$  que contienen al menos un elemento invertible (solo el elemento 0 si el monoide  $M$  es de Puiseux). Motivado por el trabajo de T. Tamura, las propiedades algebraicas y aritméticas de los monoides potencia y sus monoides potencia restringidos han sido objeto de mucha investigación durante las últimas décadas (véase [20,37] y las referencias en estos dos artículos). En particular, el estudio de las factorizaciones atómicas en monoides potencia es un tema relevante en las ramas del álgebra abstracta y la combinatoria aditiva que ha sido intensamente investigado durante los últimos años (vease, por ejemplo, [24–26, 31]).

En su tesis de licenciatura, Marcos ha investigado fundamentalmente los monooides potencia que se obtienen usando monooides de Puiseux como monooides bases. En la misma tesis se establece un conjunto de resultados originales sobre la estructura atómica y las factorizaciones de los monooides potencia, y también se investiga el potencial ascenso a los monooides potencia  $\mathcal{P}_{\text{fin}}(M)$  de varias propiedades aritméticas y atómicas de los correspondientes monooides de Puiseux  $M$ . El ascenso de propiedades atómicas y de factorizaciones es un tema relevante y tradicional en álgebra que ha sido estudiado por casi dos siglos: esto lo evidencia el clásico teorema de las bases de Hilbert, que da una respuesta positiva al ascenso de la propiedad Noetheriana a extensiones polinomiales (los dominios Noetherianos son dominios de factorizaciones acotadas; ver [18]) y el teorema de Gauss sobre el ascenso de la propiedad de factorización única a extensiones polinomiales. En la tesis de Marcos se establecen resultados paralelos a estos: se demuestra que si un monoide de Puiseux satisface la propiedad de factorización acotada, la propiedad de factorización finita, o la condición de cadenas ascendentes para ideales principales, entonces su monoide potencia correspondiente también satisface la propiedad de factorización acotada, la propiedad de factorización finita, o la condición de cadenas ascendentes para ideales principales, respectivamente.

Con el fin de explorar la atomicidad del monoide potencia prototípico, dígase  $\mathcal{P}_{\text{fin},0}(\mathbb{N}_0)$ , es de crucial importancia el cómputo de su conjunto de átomos así como otros conjuntos relevantes de elementos atómicos, incluyendo las moléculas (i.e., elementos de factorización única). Para lograr este cómputo, Marcos ha mejorado el algoritmo más eficiente que existía para calcular el conjunto de átomos de  $\mathcal{P}_{\text{fin},0}(\mathbb{N}_0)$  (luego de ser particionado de forma escalonada). Este nuevo algoritmo, diseñado e implementado por Marcos, tiene una complejidad significativamente menor que el algoritmo al cual este reemplaza y, como resultado, este nuevo algoritmo ha permitido por vez primera calcular las primeras 30 filas del triángulo atómico de Pascal del monoide potencia  $\mathcal{P}_{\text{fin},0}(\mathbb{N}_0)$ . Este algoritmo es relevante y práctico para la comunidad científica de la teoría de las factorizaciones pues dada la mejora en términos de complejidad que el mismo muestra, este ha servido para corroborar la conjetura (aún abierta) que plantea que cada fila de dicho triángulo atómico es unimodal. Aparte de este algoritmo, la tesis de Marcos ofrece un algoritmo para el cómputo eficiente (también por particiones escalonadas) de las moléculas del mismo monoide  $\mathcal{P}_{\text{fin},0}(\mathbb{N}_0)$ .

Marcos ha estado investigando bajo la supervisión de uno de sus tutores de tesis sistemáticamente por los últimos tres años, y durante el último año con ambos tutores. Su labor como joven investigador ha sido extraordinaria. Tanto es así que Marcos fue capaz de publicar tres artículos científicos en revistas matemáticas de alta calidad, incluyendo una publicación [3] en *Communications in Algebra*, la cual es una de las tres revistas de álgebra de mayor tradición y calidad (junto a *Journal of Algebra* y a *Journal of Pure and Applied Algebra*). Dada la calidad de sus publicaciones y a este

impresionante desempeño investigativo, Marcos fue recientemente galardonado como el estudiante más integral de MatCom en términos de labor investigativa, y como uno de los tres más destacados a nivel de la Universidad de la Habana. Nuestra opinión como sus tutores es que Marcos ha sido un estudiante ejemplar y su entrega a la investigación ha sido excepcional. Marcos también ha sido muy efectivo colaborando con otros jóvenes científicos. Por ejemplo, Marcos ha colaborado con otros estudiantes de licenciatura, incluyendo Khalid Ajran del MIT, Juliet Bringas de MatCom, Benjamin Li del MIT, Henrick Rabinovitz del MIT, Pedro Rodríguez de MatCom, y Easton Singer de Harvard. También cabe destacar que Marcos es el autor principal de su último artículo científico, lo cual demuestra no solo la evolución y el potencial de Marcos como científico sino también lo capacitado que él está para escribir y comunicar su trabajo investigativo al nivel más elevado: en este último artículo, Marcos estuvo a cargo de la escritura y revisión final (aparte de contribuir significativamente en el establecimiento de los resultados más importantes).

Finalmente, nos gustaría destacar, que su fuerza como investigador nunca le ha restado humildad como ser humano, y este último aspecto nos ha hecho nuestra experiencia como tutores de Marcos una travesía muy amena y estimulante.

Por todas las razones argumentadas anteriormente, consideramos que el estudiante Marcos Tirador está más que capacitado para graduarse en la Universidad de La Habana con su merecido título de Licenciado en Ciencia de la Computación.

Dr. Luis Ramiro Piñeiro Díaz

Dr. Felix Gotti

# Resumen

Un submonoide del grupo aditivo  $\mathbb{Q}$  se llama monoide de Puiseux si está formado por racionales no negativos. Dado un monoide  $M$ , el conjunto conformado por todos los subconjuntos finitos no vacíos de  $M$  también es un monoide bajo la suma de Minkowski, y se llama el monoide potencia (finitario) de  $M$ ; y si se toma el conjunto conformado solo por los subconjuntos de  $M$  que tienen algún elemento invertible, también es un monoide bajo la misma operación, llamado monoide potencia restringido (finitario) de  $M$ . En este trabajo de diploma se aborda la atomicidad y las propiedades de factorización en monoides potencia de monoides de Puiseux. Se presta especial atención al ascenso de la propiedad de ser atómico, así como de las propiedades de factorización acotada como de factorización finita (también son consideradas la condición de cadena ascendente de ideales principales y la propiedad de factorización finita por longitud). En esta tesis además se explora la atomicidad de los monoides potencia restringidos de monoides numéricos (submonoides de  $\mathbb{N}_0$  con complemento finito). Se demuestra que en estos no existen átomos fuertes, ni elementos primarios, y por ende tampoco elementos primos. Se creó un algoritmo eficiente para computar el conjunto de átomos (y otro para el de moléculas) del monoide potencia  $\mathcal{P}_{\text{fin},0}(\mathbb{N}_0)$ , el cual fue de crucial importancia a la hora de investigar los átomos de este monoide.

# Abstract

A submonoid of the additive group  $\mathbb{Q}$  is called a Puiseux monoid if it consists of nonnegative rationals. Given a monoid  $M$ , the set consisting of all nonempty finite subsets of  $M$  is also a monoid under the Minkowski sum, and it is called the (finitary) power monoid of  $M$ ; and if we take the set consisting only of the subsets of  $M$  having at least one invertible element, it is also a monoid under the same operation, called the restricted (finitary) power monoid of  $M$ . In this undergraduate dissertation we study atomicity and factorization properties in power monoids of Puiseux monoids. We specially focus on the ascent of the property of being atomic and both the bounded and the finite factorization properties (the ascending chain on principal ideals and the length-finite factorization properties are also considered here). This thesis also explores the atomicity of the restricted power monoids of numerical monoids (submonoids of  $\mathbb{N}_0$  with finite complement). It is shown that in these power monoids there are no strong atoms, nor primary elements, and therefore no prime elements either. An efficient algorithm was created to compute the set of atoms (and another for the set of molecules) of the power monoid  $\mathcal{P}_{\text{fin},0}(\mathbb{N}_0)$ , which was crucial for investigating the atoms of this monoid.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>6</b>
1.1. Notación General . . . . .	6
1.2. Monoides conmutativos . . . . .	6
1.3. Factorizaciones . . . . .	8
1.4. Monoides Numéricos y de Puiseux . . . . .	9
1.5. Monoides Potencia . . . . .	10
1.6. Notación computacional . . . . .	10
<b>2. Atomicidad en monoides Potencia de monoides de Puiseux</b>	<b>12</b>
<b>3. Las propiedades de factorización acotada y finita.</b>	<b>18</b>
<b>4. Átomos y otras nociones más débiles que elementos primos</b>	<b>22</b>
<b>5. Una separación escalonada del conjunto de átomos del monoide potencia restringido de un monoide numérico</b>	<b>27</b>
5.1. Algoritmo que calcula $\{\alpha_{n,k}\}$ . . . . .	28
5.2. Análisis del comportamiento de $\{\alpha_{n,k}\}$ . . . . .	32
5.3. Problemas Relacionados Adicionales . . . . .	37
5.3.1. Extensión del algoritmo para calcular moléculas . . . . .	37
<b>Conclusiones y recomendaciones</b>	<b>40</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>42</b>

# Introducción

La teoría de la factorización es una rama del álgebra que se origina del álgebra conmutativa y la teoría algebraica de los números. La misma se encarga de estudiar el fenómeno de las factorizaciones en elementos irreducibles que no son únicas, en el contexto de monoides (semigrupos con elemento identidad) y dominios de integridad. El objetivo principal de esta teoría es estudiar cuán cerca está un monoide o un dominio de integridad de ser factorial (tiene factorización única para todos sus elementos). En las últimas cinco décadas la teoría de la factorización ha sido activamente investigada en conexión con otras áreas, entre las que se puede mencionar la teoría de números, la combinatoria y la geometría convexa.

Como se mencionaba antes, el origen de la teoría de la factorización es la teoría algebraica de los números. Uno de los principales hechos que motivan el surgimiento de esta rama, es que el anillo de enteros de un cuerpo numérico algebraico, por lo general, no es factorial. Un ejemplo de esto es el anillo de enteros  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ , en el cual se puede escribir el elemento 6 de dos formas como producto de irreducibles,  $2 \cdot 3$  y  $(1 - \sqrt{-5}) \cdot (1 + \sqrt{-5})$ .

A través de la historia varias teorías han sido desarrolladas para explicar el fenómeno de las factorizaciones no únicas. En la segunda mitad del siglo XX, W. Narkiewicz comenzó un estudio sistemático de las factorizaciones no únicas en los anillos de enteros [5]. También, en [6], L. Carlitz dio una caracterización de los anillos de enteros medio factoriales (todas las factorizaciones del mismo elemento en irreducibles tienen la misma cantidad de factores). Otras teorías que han ayudado a entender las factorizaciones no únicas han sido la teoría de formas cuadráticas binarias en cuerpos cuadráticos de  $\mathbb{C}$ . F. Gauss, la teoría de divisores de L. Kronecker y la teoría de ideales de R. Dedekind. Más recientemente R. Gilmer estudió propiedades de factorización en el contexto de dominios de integridad más generales (en [7] se aborda el trabajo de Gilmer). Motivado por el trabajo de R. Gilmer, durante las últimas 5 décadas, muchos autores han contribuido a desarrollar la teoría de la factorización en dominios de integridad generales (evidencia de esto se puede encontrar en [8]).

Una generalización natural a la propiedad de ser factorial es aquella de ser atómico. Un dominio de integridad o un monoide se dice atómico si todos sus elementos pueden ser factorizados en irreducibles. La atomicidad de muchas clases de dominios de in-

---

tegridad ha sido un tema arduamente investigado en los últimos 30 años (ejemplo de esto es [9]). Cabe preguntarse entonces, por qué es interesante esta propiedad. Resulta que muchas clases interesantes de dominios de integridad consisten en miembros que son atómicos pero no factoriales, incluyendo los dominios de Dedekind (particularmente anillos de enteros algebraicos, mencionados anteriormente), y como ejemplos más generales, los dominios Noetherianos y dominios Krull. Para algunas de estas clases, la estructura atómica de sus miembros determina algunas de sus propiedades algebraicas hasta cierto punto. Por ejemplo, en el trabajo de Carlitz [6] mencionado anteriormente se prueba que un anillo algebraico de enteros es medio factorial si y solo si la dimensión de su grupo de clase es a lo sumo 2.

Muchas de las publicaciones científicas hechas en las pasadas 3 décadas en relación con la teoría de la factorización, han centrado su estudio en el contexto de monoides conmutativos y cancelativos. Esto se debe a que muchos de los problemas que surgen de la factorización de elementos en dominios de integridad dependen solamente de su estructura multiplicativa (la cual constituye un monoide). Como resultado han sido continuamente desarrolladas varias técnicas para medir la no unicidad de las factorizaciones en el contexto de monoides conmutativos y cancelativos. Se han introducido muchas invariantes de factorización y estadísticas numéricas como los conjuntos de longitud, la elasticidad, el grado catenario, el grado de doma, la unimodalidad, la distribución de elementos importantes como átomos, moléculas, átomos fuertes, elementos primos, primarios y primales, entre otros.

El estudio de los problemas de factorización en monoides numéricos, o sea, submonoides de los enteros no negativos con complemento finito, fue por primera vez llevado a cabo en [10] y [11]. Estos monoides han sido objeto de un extenso estudio, revelando conexiones a través de varios campos matemáticos y aplicaciones prácticas (ver [32, 34] para una visión general completa). También vale mencionar el estudio de algunas de sus generalizaciones de mayor rango, por ejemplo el artículo de C. Liu, P. Rodríguez y el autor de esta tesis [1].

Más recientemente se inició un estudio frecuente, por varios científicos del área, sobre los submonoides de los números racionales no negativos (ejemplo de esto son [12] y [13]). Los submonoides aditivos de  $\mathbb{Q}_{\geq 0}$  aparecen naturalmente en el contexto de la teoría de anillos conmutativos como evaluación de subdominios de cuerpos de series de Puiseux, que fueron estudiados por primera vez por el matemático francés V. A. Puiseux en 1850 [14]. No es raro entonces que estos monoides sean investigados bajo el nombre de monoides de Puiseux para honrar su memoria.

Aunque la atomicidad de los monoides de Puiseux haya sido estudiada sistemáticamente, solo en los últimos años (iniciada por F. Gotti en [15]) los monoides de Puiseux han sido cruciales en la construcción de numerosos ejemplos en la teoría de anillos conmutativos. Por ejemplo, en el año 1974, A. Grams [16] utilizó un monoide de Puiseux como el ingrediente principal para construir el primer ejemplo de un

dominio de integridad atómico que no satisface la condición de cadena ascendente de ideales principales (ACCP por sus siglas en inglés); lo cual refutó la suposición del matemático P. Cohn de que todo dominio de integridad atómico satisfacía la ACCP ([17, Proposición 1.1]). La exploración de los monoïdes de Puiseux, particularmente en la teoría de la factorización y su relevancia en contextos tanto conmutativos como no conmutativos, se ha convertido en un tema de interés académico reciente (esto se evidencia en [4, 12, 22, 23]).

Considérese un monoïde aditivo  $M$ . Para subconjuntos no vacíos  $S$  y  $T$  de  $M$ , el conjunto  $S + T := \{s + t \mid s \in S \text{ y } t \in T\}$  se llama la suma de Minkowski de  $S$  y  $T$  en  $M$ . Está claro que el conjunto  $\mathcal{P}(M)$  que consiste de todos los subconjuntos no vacíos de  $M$  es también un monoïde bajo la suma de Minkowski, el cual es llamado el monoïde potencia de  $M$ . Adicionalmente, el submonoïde de  $\mathcal{P}(M)$  que consiste en todos los subconjuntos finitos no vacíos es llamado el monoïde potencia finitario de  $M$  y se denota por  $\mathcal{P}_{\text{fin}}(M)$ . Los monoïdes potencia y los monoïdes potencia finitarios fueron investigados sistemáticamente en la segunda mitad del siglo pasado por T. Tamura y otros matemáticos (ejemplo de esto es [20]). Dos de los problemas más investigados fueron el ascenso de propiedades algebraicas del monoïde  $M$  a  $\mathcal{P}(M)$  y el problema del isomorfismo (este es, si el hecho de que  $\mathcal{P}(M)$  y  $\mathcal{P}(M')$  son isomorfos en cierta clase de monoïdes garantiza o no que  $M$  y  $M'$  sean isomorfos).

Los objetos algebraicos centrales que se estudian en este trabajo son monoïdes potencia finitarios de monoïdes de Puiseux. Para mayor simplicidad en el resto del documento se usa el término “monoïde potencia” para referirse a “monoïdes potencia finitarios” (esto no debe causar ninguna confusión ya que no se trabaja aquí con monoïdes potencia no finitarios). Las factorizaciones y ciertos aspectos aritméticos del monoïde potencia  $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}_0)$  fueron estudiados por Y. Fan y S. Tringali en [24], mientras que los aspectos atómicos y relativos a la teoría de ideales de monoïdes potencia de monoïdes numéricos fueron recientemente estudiados por A. Bienvenu y A. Geroldinger en [25]. Más recientemente, el problema del isomorfismo en la clase consistente en todos los monoïdes potencia (restringidos) de monoïdes de Puiseux fue resuelto en [26] por S. Tringali y W. Yan. El **problema científico** principal que se aborda en esta tesis, es el ascenso de ciertas propiedades atómicas y de factorización desde un monoïde de Puiseux a su monoïde potencia correspondiente.

Como se explicó anteriormente, un monoïde conmutativo es llamado atómico si se cumple que cada elemento no invertible puede ser escrito como una suma finita de átomos (i.e, elementos irreducibles). El ascenso de la atomicidad de la clase de los monoïdes de Puiseux a la de sus álgebras de monoïdes ha sido considerada por J. Coykendall y F. Gotti en [22] y más recientemente, por F. Gotti y H. Rabinovitz en [27] (el ascenso de la atomicidad de la clase de monoïdes conmutativos libres de torsión a sus monoïdes álgebra, fue lanzado por primera vez como un problema abierto por R. Gilmer en [19, p. 189]).

---

El **objetivo general** de este trabajo es hacer un estudio de la estructura atómica de los monoides potencia de monoides de Puiseux y en particular de monoides potencia restringidos de monoides numéricos. Para llevarlo a cabo, se plantearon los siguientes objetivos específicos:

- Analizar el ascenso de la atomicidad de un monoide de Puiseux a su monoide potencia.
- Analizar el ascenso de otras propiedades de factorización de un monoide de Puiseux a su monoide potencia, como son las propiedades de factorización finita, de factorización acotada, de factorización finita por longitud y la condición de cadena ascendente de ideales principales.
- Crear algoritmos para calcular los átomos y moléculas del monoide  $\mathcal{P}_{\text{fin},0}(\mathbb{N}_0)$ .
- Investigar ciertas propiedades algebraicas y aritméticas en el monoide  $\mathcal{P}_{\text{fin},0}(\mathbb{N}_0)$ , y analizar su generalización al monoide potencia restringido de cualquier monoide numérico.

El resto de esta introducción estará dedicado a presentar la forma en que se estructura el desarrollo del manuscrito para evidenciar los resultados a los que se arriban; al tiempo que se muestran definiciones básicas, necesarias para entender los objetivos que se desarrollan. El capítulo **1** será dedicado a presentar todos los conceptos clave y definiciones esenciales para entender los resultados que se estarán explicando en el resto del documento, así como la notación que se usará a lo largo de este.

En el capítulo **2** de este trabajo de diploma se aborda el ascenso de la atomicidad de la clase de monoides de Puiseux a aquella de sus monoides potencia; se demuestra que en general la propiedad de ser atómico no asciende a los monoides potencia de monoides de Puiseux. Por otro lado, se demuestra que la propiedad de ser atómico sí asciende a monoides potencia de monoides de Puiseux, si se restringen a la clase de monoides de Puiseux que son MCD (un monoide conmutativo es llamado MCD si todo subconjunto finito tiene un divisor común maximal). En este capítulo también se prueba que la condición de cadena ascendente de ideales principales (ACCP por sus siglas en inglés) asciende a los monoide potencia de los monoides de Puiseux (la ACCP ha sido ampliamente investigada en conexión con la atomicidad: véase el artículo reciente [28] y las referencias en este).

Siguiendo la notación en [18] se dice que un monoide atómico es un monoide de factorización acotada (BFM por sus siglas en inglés), si se cumple que cada elemento no invertible tiene un conjunto de longitudes de factorizaciones finito (la longitud de una factorización es el número de átomos de esta, contando repeticiones). Siguiendo

el mismo artículo científico se dice que un monoide atómico es un monoide de factorización finita (FFM por sus siglas en inglés) si se cumple que todo elemento no invertible tiene solo un número finito de factorizaciones (claramente, cada FFM es BFM). Tanto la propiedad de factorización finita como de factorización acotada han sido activamente investigadas desde que fueron introducidas por D. D. Anderson, D. F. Anderson y M. Zafrullah en [18] (en [29] se puede encontrar una visión general).

El propósito principal del capítulo **3** es considerar el ascenso de las propiedades de factorización finita y factorización acotada. Se demuestra que ambas propiedades ascienden a los monoides potencia de monoides de Puiseux. Al igual que la propiedad de factorización acotada, la propiedad de factorización finita por longitud, introducida recientemente por A. Geroldinger y Q. Zhong en [30], es una versión más débil de la propiedad de factorización finita. Se demuestra también en el capítulo **3** que la propiedad de factorización finita por longitud no asciende a monoides potencia de monoides de Puiseux.

El concepto de número primo de la aritmética se extiende naturalmente al álgebra: un elemento primo  $p$  es tal que si  $p \mid r + s$ , entonces  $p \mid r$  o  $p \mid s$ . Sin embargo, aunque este concepto y el de irreducible en la aritmética coinciden, no es el caso en estructuras algebraicas más generales como los monoides conmutativos, donde todo elemento primo es un átomo, pero no al revés. El capítulo **4** está dedicado a analizar la existencia de los elementos primos en los monoides potencia restringidos de monoides numéricos; así como la existencia de dos de sus generalizaciones más comunes: los átomos fuertes y los elementos primarios. En efecto, se demuestra que los monoides potencia restringidos de monoides numéricos no tienen ni átomos fuertes ni elementos primario, por tanto tampoco tienen elementos primos.

Finalmente, el capítulo **5** está dedicado al estudio del conjunto de átomos de los monoides potencia restringidos de monoides numéricos, en especial del monoide  $\mathcal{P}_{\text{fin},0}(\mathbb{N}_0)$ . Para ello se introduce lo que se llamará una separación escalonada del conjunto de átomos de cualquier monoide numérico: Sea  $N$  un monoide numérico, para cada  $n \in \mathbb{N}_0$  se define  $A_{n,k}(N) := \{A \in \mathcal{A}(\mathcal{P}_{\text{fin},0}(N)) \mid \text{máx } A \leq n \text{ y } |A| = k\}$ , con  $1 \leq k \leq n+1$ . Se define además  $\alpha_{n,k}(N) := |A_{n,k}(N)|$ . Nótese como  $\{\{\alpha_{n,k}(N)\}_{n \in \mathbb{N}_0}\}_{1 \leq k \leq n+1}$  es una sucesión finita, donde cada elemento es en sí una sucesión. Esta sucesión se puede representar de forma similar al triángulo de Pascal<sup>1</sup>, disponiendo sus elementos en forma de escalera o triángulo. Entonces se presenta en este capítulo un algoritmo que calcula, dado un  $n \in \mathbb{N}$ , las primeras  $n$  filas de  $\{\{\alpha_{n,k}(\mathbb{N}_0)\}_{n \in \mathbb{N}_0}\}_{1 \leq k \leq n+1}$ . Esto permite conjeturar varias cuestiones acerca del comportamiento de estas sucesiones. En especial dos cuestiones fundamentales sobre los elementos situados en sus diagonales principales fueron demostradas en este capítulo. Finalmente el algoritmo hallado se extiende para calcular una separación escalonada del conjunto de moléculas.

---

<sup>1</sup>El triángulo de Pascal es una representación de los coeficientes binomiales  $\binom{n}{k}$  ordenados en forma de triángulo.

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Notación General

Definimos el conjunto de los números naturales, excluyendo el cero, como  $\mathbb{N} := 1, 2, \dots$ , y cuando incluimos el cero, se representa como  $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Para cualquier par de enteros  $x, y \in \mathbb{Z}$ , el intervalo de enteros entre ellos se denota por  $\llbracket x, y \rrbracket$ . Este intervalo está vacío si  $x > y$ . Además, definimos  $c\llbracket x, y \rrbracket := \{cr \mid r \in \llbracket x, y \rrbracket\}$ . Para cualquier subconjunto  $X$  de  $\mathbb{R}$  y un número real  $r$ , el conjunto  $X_{\geq r}$  está conformado por todos los elementos  $x$  en  $X$  que son mayores o iguales a  $r$ . De manera similar,  $X_{>r}$  se utiliza para representar elementos estrictamente mayores que  $r$ .

Para dos números enteros  $x, y$  se define su *máximo común divisor* (denotado como  $\gcd(x, y)$  por sus siglas en inglés) como un entero positivo  $d$  tal que  $d$  es divisor común de  $x$  e  $y$  (o sea  $d \mid x$  y  $d \mid y$ ) y  $d' \mid d$  para cualquier otro divisor común  $d'$  de  $x$  e  $y$ . Para cada número racional positivo  $q \in \mathbb{Q}_{>0}$ , existen números naturales únicos  $n$  y  $d$  tales que  $q = n/d$  y  $\gcd(n, d) = 1$ , los cuales denotamos como  $\mathfrak{n}(q)$  y  $\mathfrak{d}(q)$ , respectivamente. Llamamos a  $\mathfrak{n}(q)$  y  $\mathfrak{d}(q)$  el *numerador* y *denominador* de  $q$ , respectivamente. La valoración  $p$ -ádica para un entero no nulo  $n$  es el mayor valor en el conjunto  $\{k \in \mathbb{N} \mid p^k \text{ divide } n\}$ , denotado por  $\nu_p(n)$ . Para cualquier número racional  $q$ , su valoración  $p$ -ádica se define como  $\nu_p(q) = \nu_p(\mathfrak{n}(q)) - \nu_p(\mathfrak{d}(q))$ .

### 1.2. Monoides conmutativos

En este documento, un *monoide* se entiende como un semigrupo conmutativo con un elemento identidad. Sea  $M$  un monoide. Como estamos asumiendo que todo monoide aquí es conmutativo, entonces usaremos la notación aditiva, a menos que se especifique lo contrario. En particular, “+” denota la operación de  $M$ , mientras que  $0$  denota el elemento identidad. Definimos  $M^\bullet$  como  $M$  excluyendo el elemento cero, y

$M$  se llama *trivial* si  $M^\bullet$  es el vacío. El grupo de elementos invertibles dentro de  $M$  se representa como  $M^\times$ , y  $M$  se considera *reducido* si  $M^\times$  es un grupo trivial. El *grupo cociente* de  $M$ , denotado  $\mathbf{gp}(M)$ , es el único grupo abeliano, salvo isomorfismos, tal que cualquier grupo abeliano que contenga una imagen isomorfa de  $M$  también debe contener una imagen isomorfa de  $\mathbf{gp}(M)$ . El *rango* de  $M$  se define como el rango de  $\mathbf{gp}(M)$  como un módulo sobre  $\mathbb{Z}$ , es decir, la dimensión de  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{gp}(M)$ . Un monoide  $M$  es *libre de torsión* si  $nx = ny$  para algún  $n \in \mathbb{N}$  y  $x, y \in M$  implica  $x = y$ . Un monoide es libre de torsión si y solo si su grupo cociente es libre de torsión (referencia a [33, Sección 2.A]). El *monoide reducido* de  $M$ , denotado  $M_{\text{red}}$ , es el cociente de  $M$  por  $M^\times$ .

Para elementos  $r, s \in M$ , se dice que  $s$  *divide* a  $r$  en  $M$  si existe  $t \in M$  tal que  $r = s + t$ ; en este caso, escribimos  $s \mid_M r$ . Esta definición puede parecer poco natural en el contexto de monoides aditivos, pero esta, al igual que otras como la de potencia, factorización o invertible, se adoptan así a partir de su origen en contextos multiplicativos. Un submonoide  $M'$  de  $M$  se llama *submonoide cerrado por divisores* si cualquier elemento de  $M$  que divide un elemento de  $M'$  está en  $M'$  también. Dado un subconjunto  $S$  de  $M$ , el submonoide más pequeño de  $M$  que contiene  $S$  se denota por  $\langle S \rangle$ , y en este caso,  $S$  se llama un *conjunto generador* de  $\langle S \rangle$ . El monoide  $M$  es *finitamente generado* si se puede expresar como  $M = \langle S \rangle$  para algún subconjunto finito  $S$  de  $M$ .

Un elemento  $a$  en  $M \setminus M^\times$  es un *átomo* si para  $a = r + s$  con  $r, s \in M$ , al menos uno de  $r$  o  $s$  pertenece a  $M^\times$ . El conjunto de todos los átomos en  $M$  se denota por  $\mathcal{A}(M)$ . En un monoide reducido  $M$ , notamos que  $\mathcal{A}(M)$  está incluido en cualquier conjunto generador de  $M$ . Un elemento  $b \in M$  se llama *atómico* si está en el submonoide de  $M$  generado por  $\mathcal{A}(M)$ . Siguiendo a [17], decimos que  $M$  es *atómico* si cada elemento no invertible en  $M$  es atómico.

Decimos que  $d \in M$  es un *divisor común maximal* de  $A \subset M$  si  $d$  divide a cada elemento en  $A$  y no existe un elemento no invertible  $d' \in M$  tal que  $d' + d$  también divide a cada elemento en  $A$ . Note que no todo subconjunto  $A$  de  $M$  tiene un divisor común maximal. Llamamos a  $M$  un monoide  $k$ -MCD (por las siglas en inglés de divisor común maximal), para algún  $k \in \mathbb{N}$ , si cada subconjunto  $A \subset M$  tal que  $|A| = k$ , tiene un divisor común maximal. Además, llamamos a  $M$  un monoide MCD si  $M$  es  $k$ -MCD para cada  $k \in \mathbb{N}$ . Notemos que en el monoide multiplicativo del anillo  $\mathbb{Z}$  las definiciones de divisor común maximal y la de máximo común divisor, dada al inicio de este capítulo, son equivalentes. Sin embargo, el concepto de máximo común divisor se puede generalizar de forma natural a monoides más generales, donde deja de ser equivalente con la definición de divisor común maximal, siendo esta última más general.

Un subconjunto  $I$  dentro de  $M$  es un *ideal* si al sumar cualquier elemento de  $M$  a  $I$  sigue estando dentro de  $I$  (es decir,  $I + M := \{r + s \mid r \in I \text{ y } s \in M\} \subset I$ ).

Un ideal se llama *propio* si no abarca el monoide completo  $M$ . Un *ideal principal* se define como uno que puede ser generado a partir de un solo elemento de  $M$ . Decimos que  $M$  satisface la *condición de cadena ascendente de ideales principales* (ACCP) si cada cadena ascendente  $\{r_n + M\}_{n \in \mathbb{N}}$  de ideales principales de  $M$ , eventualmente se estabiliza; es decir, existe un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $r_n + M = r_{n+1} + M$  para cada  $n \geq n_0$ .

### 1.3. Factorizaciones

Un monoide multiplicativo  $F$  se dice que es *libre en* un subconjunto  $A$  si cada elemento  $x \in F$  tiene una representación única en la forma

$$x = \prod_{a \in A} a^{\mathbf{v}_a(x)},$$

donde  $\mathbf{v}_a(x) \in \mathbb{N}_0$  y  $\mathbf{v}_a(x) > 0$  solo para un número finito de  $a \in A$ . Para cualquier conjunto dado  $A$ , hay un único monoide libre  $F$  en  $A$ , salvo isomorfismos. El monoide libre en  $\mathcal{A}(M_{\text{red}})$ , etiquetado por  $Z(M)$ , se llama el *monoide de factorización* de  $M$ , y sus elementos se conocen como *factorizaciones*. Para una factorización  $z = a_1 \cdots a_n$  en  $Z(M)$ ,  $n$  se llama la *longitud* de  $z$ , y se denota por  $|z|$ . El mapeo de  $Z(M)$  a  $M_{\text{red}}$ , que lleva cada átomo a sí mismo, se llama el *homomorfismo de factorización* de  $M$ . El conjunto de todas las factorizaciones de un elemento  $x \in M$ , denominado  $Z_M(x)$  (o simplemente  $Z(x)$  cuando no haya ambigüedad), es la imagen inversa de  $x$  bajo este homomorfismo. Decimos que  $M$  es *atómico* si y solo si cada elemento en  $M$  tiene al menos una factorización.

Para cada  $x \in M$ , el *conjunto de longitudes* de  $x$  se define por

$$L(x) := L_M(x) := \{|z| : z \in Z(x)\}.$$

Un elemento  $x \in M$  es llamado *molécula* si tiene factorización única en  $M$ , es decir  $|Z(x)| = 1$ . Al conjunto de todas las moléculas del monoide  $M$  lo denotamos por  $\mathcal{M}(M)$ . Es evidente que  $\mathcal{A}(M) \subset \mathcal{M}(M)$ . El conjunto de moléculas de los monoides conmutativos ha sido también ampliamente estudiado, por ejemplo por M. Gotti y el autor de la presente tesis en [2].

Un elemento no invertible  $p$  en  $M$  es llamado *primo* si siempre que  $p \mid r + s$  y  $p \nmid r$ , con  $r, s \in M$ , entonces  $p \mid s$ . Es fácil de ver que todo elemento primo es un átomo, sin embargo la implicación inversa no es cierta en el caso general. Definimos *átomo fuerte* como un átomo  $a \in M$  tal que todas sus potencias son moléculas, es decir  $ka \in \mathcal{M}(M)$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . El concepto de átomo fuerte es uno más general que el de primo, pero más específico que el de átomo, o sea se cumple que todo elemento

primo es un átomo fuerte y que todo átomo fuerte es un átomo. Sin embargo, en el caso general ninguna de estas dos implicaciones son reversibles. Un elemento  $p \in M \setminus M^\times$  es llamado *primario* si siempre que  $p \mid r + s$  y  $p \nmid r$ , para algunos  $r, s \in M$ , entonces  $p \mid ks$ , para algún  $k \in \mathbb{N}$ . No es difícil ver que la definición de elemento primario es una más general que la de elemento primo.

Un monoide  $M$  se dice que es un *monoide de factorización única* (UFM por sus siglas en inglés) si cada elemento tiene exactamente una factorización, un *monoide de factorización finita* (FFM por sus siglas en inglés) si cada elemento tiene un número finito de factorizaciones, y un *monoide medio factorial* (HFM por sus siglas en inglés) si cada factorización del mismo elemento tiene la misma longitud. Un monoide  $M$  se llama *monoide de factorización acotada* (BFM por sus siglas en inglés) si tiene un límite superior finito de las longitudes de las factorizaciones para cada uno de sus elementos.

Llamamos a un monoide  $M$  un *monoide factorial de longitud* (o un LFM por sus siglas en inglés) si cada elemento de  $M$  tiene a lo sumo una factorización de longitud  $k$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ . Observe que si un monoide  $M$  satisface ambas condiciones HFM y LFM, entonces  $M$  es un UFM. Además, decimos que un monoide  $M$  es un *monoide de factorización finita por longitud* (o un LFFM por sus siglas en inglés) si el conjunto  $\{z \in Z(x) \mid |z| = k\}$  es finito para cada  $k \in \mathbb{N}$ . Observe que si un monoide  $M$  es un LFFM y un BFM al mismo tiempo, entonces es un FFM.

## 1.4. Monoides Numéricos y de Puiseux

Un *monoide numérico* (a menudo estudiado como semigrupo numérico) es un submonoide de  $(\mathbb{N}_0, +)$  caracterizado por tener un complemento finito en  $\mathbb{N}_0$ . Cuando  $\mathbb{N}_0 \setminus N$  no está vacío, su elemento más grande se conoce como el *número de Frobenius* de  $N$ , denotado como  $F(N)$ . Los monoides numéricos son notables por ser finitamente generados, con sus conjuntos generadores mínimos correspondiendo a sus conjuntos de átomos. Debido a esta generación finita, se clasifican como FFMs, como se afirma en [9, Proposición 2.7.8], y por extensión, como BFMs (monoides de factorización acotada).

Por otro lado, un *monoide de Puiseux* es un submonoide de  $(\mathbb{Q}_{\geq 0}, +)$ , que presenta un conjunto diferente de propiedades. A diferencia de los monoides numéricos, los monoides Puiseux pueden no ser finitamente generados ni atómicos. Un ejemplo es  $M = \langle 1/2^n \mid n \in \mathbb{N}_0 \rangle$ , que carece de generación finita y elementos atómicos. Curiosamente, algunos monoides Puiseux atómicos no se clasifican como BFMs, como  $\langle 1/p \mid p \in \mathbb{P} \rangle$ , mientras que otros pueden ser BFMs pero no FFMs, como  $\mathbb{N}_0 \cup \mathbb{Q}_{\geq n}$ .

Decimos que una sucesión de números racionales es *bien ordenada* (resp., *cobien ordenada*) si no contiene ninguna subsucesión estrictamente decreciente (resp.,

creciente). Siguiendo a [21], decimos que un monoide de Puiseux  $M$  es *bien ordenado* (resp., *co-bien ordenado*) si se puede generar por una sucesión bien ordenada (resp., co-bien ordenada). Hay monoides de Puiseux atómicos que no son ni bien ordenados ni co-bien ordenados (como se puede ver en [36, Ejemplo 3.1]).

## 1.5. Monoides Potencia

El concepto de *monoide potencia* surge al considerar el conjunto formado por todos los subconjuntos finitos no vacíos de un monoide  $M$ , que denotamos como  $\mathcal{P}_{\text{fin}}(M)$ . Para cualesquiera dos elementos  $S, T \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(M)$ , su suma se define por

$$S +' T := \{s + t \mid s \in S \text{ y } t \in T\}.$$

Esta operación dota a  $\mathcal{P}_{\text{fin}}(M)$  de una estructura de monoide, que en adelante se denominará  $+$  por simplicidad (esto por lo general no causará ambigüedad).

**Definición 1.1** *El monoide potencia de  $M$  se define como  $\mathcal{P}_{\text{fin}}(M)$ , con la operación de suma definida anteriormente.*

Además, introducimos  $\mathcal{P}_{\text{fin}, \times}(M)$ , un subconjunto de  $\mathcal{P}_{\text{fin}}(M)$  que consiste solo en aquellos elementos que intersectan con  $M^\times$ ; es decir,

$$\mathcal{P}_{\text{fin}, \times}(M) := \{S \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(M) \mid S \cap M^\times \text{ no es vacío}\}.$$

Este subconjunto forma un submonoide, conocido como el *monoide potencia restringido* de  $M$ . Cuando el único invertible del monoide es el 0 escribimos  $\mathcal{P}_{\text{fin}, 0}(M)$ .

## 1.6. Notación computacional

Sea  $k$  un entero positivo. Sabemos que  $k$  puede ser escrito de forma única como suma de potencias de dos, en la forma

$$k = \sum_{i=0}^n c_i 2^i, \quad c_i \in \{0, 1\}.$$

Al número  $\overline{c_n c_{n-1} \dots c_0} := \sum_{i=0}^n c_i 10^i$  se le conoce como representación binaria de  $k$ . Al conjunto  $C := \{i \in \llbracket 0, n \rrbracket \mid c_i = 1\}$  (resp.  $\mathbb{N}_0 \setminus C$ ) le llamaremos el conjunto de bits activos de  $k$  (resp. conjunto de bits inactivos de  $k$ ), y a sus elementos le llamaremos bits activos de  $k$  (resp. bits inactivos de  $k$ ).

Dados dos enteros positivos  $k$  y  $n$ , llamamos a  $k \vee n$  el *or-lógico* entre  $k$  y  $n$ , y se define como

$$k \vee n = \sum_{i=0}^n c_i 2^i,$$

donde  $c_i = 1$  si  $i$  está en el conjunto de bits activos de  $k$  o en el conjunto de bits activos de  $n$ , y 0 en otro caso. Esta operación es realizada por la computadora a nivel de CPU, por lo que su ejecución se considera de tiempo constante.

## Capítulo 2

# Atomicidad en monoides Potencia de monoides de Puiseux

El objetivo principal de este capítulo es analizar cuándo la atomicidad de los monoides de Puiseux asciende a sus correspondientes monoides potencia (es decir, investigar bajo qué condiciones el monoide potencia de un monoide Puiseux atómico también es atómico). Primero, demostremos el siguiente lema.

**Lema 2.1** *Sea  $M$  un monoide de Puiseux. Sea  $B$  un elemento de  $\mathcal{P}_{fin}(M)$ . Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. Si  $|B| = 1$ , entonces  $|B + C| = |C|$  para todo  $C \in \mathcal{P}_{fin}(M)$ .
2. Si  $|B| \geq 2$ , entonces  $|B + C| > |C|$  para todo  $C \in \mathcal{P}_{fin}(M)$ .

*Demostración.* (1) Esto sale inmediatamente.

(2) Sean  $b_1$  y  $b_2$  elementos de  $B$ , con  $b_1 < b_2$ . Tenemos que  $|\{b_1\} + C| = |C|$  ya que los monoides Puiseux son cancelativos. Sea  $c$  el elemento máximo de  $C$ . Entonces  $c + b_2 > c + b_1$  y, por lo tanto,  $c + b_2$  no está en  $\{b_1\} + C$ . Por lo tanto  $|B + C| \geq |\{b_1\} + C| + 1 > |C|$ , lo que concluye la demostración.  $\square$

No es una sorpresa que la atomicidad no ascienda de un monoide Puiseux a su monoide potencia. Sin embargo, lo hace si imponemos la existencia de divisores comunes maximales.

**Teorema 2.2** *Sea  $M$  un monoide Puiseux atómico. Entonces*

1. Si  $M$  es un monoide MCD, entonces  $\mathcal{P}_{fin}(M)$  es atómico.
2. Si  $M$  no es 2-MCD, entonces  $\mathcal{P}_{fin}(M)$  no es atómico.

*Demostración.* Sea  $\mathcal{P} := \mathcal{P}_{\text{fin}}(M)$ .

(1) Supongamos que  $M$  es un monoide MCD. Entonces, asumamos para llegar a una contradicción, que  $\mathcal{P}$  no es atómico. Dado que  $B_0$  es un elemento no atómico de  $\mathcal{P}$ , existe una sucesión  $\{B_n\}_{n \geq 0}$  de elementos no atómicos de  $\mathcal{P}$  tal que  $B_{n+1} \mid_{\mathcal{P}} B_n$  y  $B_{n+1} \neq B_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ . Ahora el Lema 2.1 garantiza la existencia de  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $k := |B_n| = |B_N|$  para todo  $n \geq N$ . Entre todas las cadenas estrictamente ascendentes de elementos no atómicos de  $\mathcal{P}$  que comienzan en  $B_0$ , asumimos que  $\{B_n\}_{n \geq 0}$  está minimizando  $k$ . Por lo tanto, todo divisor de  $B_N$  en  $\mathcal{P}$  tiene cardinalidad 1 o  $k$ . Supongamos que el conjunto  $B_N$  se escribe como  $B_N = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ . Sea  $d$  un divisor común maximal de  $b_1, b_2, \dots, b_k$  en  $M$ . Entonces el único divisor común de  $A := \{b_1 - d, b_2 - d, \dots, b_k - d\}$  es  $\{0\}$ . El Lema 2.1, junto con la minimalidad de  $k$ , asegura que en cualquier descomposición de  $A$  como suma de dos elementos en  $\mathcal{P}$ , uno de ellos debe ser un singleton, y por lo tanto uno de ellos es  $\{0\}$ . Así,  $A$  es un átomo de  $\mathcal{P}$ . Además, observe que  $\{d\}$  es un elemento atómico en  $\mathcal{P}$  porque  $d$  es atómico en  $M$ . Dado que  $B_N = A + \{d\}$ , el hecho de que tanto  $A$  como  $\{d\}$  sean elementos atómicos de  $\mathcal{P}$  implica que  $B_N$  es atómico, lo cual es una contradicción. Por lo tanto  $\mathcal{P}$  debe ser atómico.

(2) Supongamos que  $M$  no es 2-MCD. Asumamos, para llegar a una contradicción, que  $\mathcal{P}$  es atómico. Sean  $b_1, b_2$  dos elementos de  $M$  que no tienen un divisor común maximal. Considere el elemento  $B := \{b_1, b_2\}$  de  $\mathcal{P}$ . Debido a que 0 no es un divisor común maximal de  $b_1$  y  $b_2$  en  $M$ , podemos tomar un  $d$  no nulo en  $M$  tal que  $d \mid_M b_1$  y  $d \mid_M b_2$ . Por lo tanto,  $B = \{b_1 - d, b_2 - d\} + \{d\}$ , de donde  $B$  no es un átomo de  $\mathcal{P}$ . Como  $\mathcal{P}$  es atómico, podemos escribir  $B = A_1 + A_2 + \dots + A_k$  para algún  $k \geq 2$  y átomos  $A_1, A_2, \dots, A_k$  de  $\mathcal{P}$ . Dado que  $|B| = 2$ , existe un elemento entre  $A_1, \dots, A_k$  con tamaño al menos 2. Podemos asumir entonces que  $|A_1| \geq 2$ . Por lo tanto, sigue del Lema 2.1 que

$$2 = |B| = |A_1 + (A_2 + \dots + A_k)| > |A_2 + \dots + A_k|,$$

obteniéndose que  $|A_i| = 1$  para cada  $i \in [[2, k]]$ , de donde  $|A_1| = |B| = 2$ . Escribamos  $A_i = \{a_i\}$  para cada  $i \in [[2, k]]$ , y definamos  $a := a_2 + \dots + a_k$ . Entonces  $A_1 = \{b_1 - a, b_2 - a\}$ . Dado que  $b_1$  y  $b_2$  no tienen un divisor común maximal, existe un  $d'$  no nulo en  $M$  tal que  $d' \mid_M b_1 - a$  y  $d' \mid_M b_2 - a$ . Entonces  $A_1 = \{b_1 - a - d', b_2 - a - d'\} + \{d'\}$ , lo que contradice que  $A_1$  es un átomo de  $\mathcal{P}$ .  $\square$

Como consecuencia, demostrar que la propiedad de ser atómico no asciende a los monoides potencia en la clase de los monoides Puiseux equivale a construir un monoide Puiseux atómico que no sea un monoide 2-MCD. Esto haremos en el siguiente contraejemplo.

**Ejemplo 2.3** Vamos a exhibir un monoide de Puiseux atómico  $M$  que no es un monoide 2-MCD.

Primero, construyamos inductivamente una sucesión de números primos con ciertas propiedades deseadas. Tomemos  $p_0 = 17$ , y luego supongamos que para  $n \in \mathbb{N}_0$ , hemos elegido primos  $p_0, \dots, p_{3n}$  tales que  $p_i > 15 \cdot 2^i$  para cada  $i \in [[0, 3n]]$ . Ahora tomemos primos  $p_{3n+1}$  y  $p_{3n+2}$  tales que  $p_{3n+2} > p_{3n+1} > \max\{p_{3n}, 15 \cdot 2^{3n+2}\}$  y

$$p_{3n+1} > \max \left\{ n \left( \frac{4}{5} - \sum_{i=0}^n \frac{1}{p_{3i}} \right), n \left( \frac{6}{7} - \sum_{i=0}^n \frac{1}{p_{3i}} \right) \right\} \quad (2.1)$$

Entonces, hemos construido inductivamente una sucesión estrictamente creciente de primos  $(p_n)_{n \geq 0}$  tal que para cada  $n \in \mathbb{N}_0$ , tanto la desigualdad (2.1) como  $p_n > 15 \cdot 2^n$  se mantienen. Por lo tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p_n} < \frac{1}{15} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{2}{15} < \frac{1}{7}. \quad (2.2)$$

Ahora, sea  $M$  el submonoide aditivo de  $\mathbb{Q}$  definido de la siguiente manera:

$$M := \left\langle \frac{1}{p_{3n}}, \frac{1}{p_{3n+1}} \left( \frac{4}{5} - \sum_{i=0}^n \frac{1}{p_{3i}} \right), \frac{1}{p_{3n+2}} \left( \frac{6}{7} - \sum_{i=0}^n \frac{1}{p_{3i}} \right) \mid n \in \mathbb{N}_0 \right\rangle.$$

Se deduce de (2.2) que  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p_n} < \frac{4}{5}$  y, por lo tanto,  $M$  es un monoide Puiseux. Para cada  $n \in \mathbb{N}_0$ , definamos

$$a_n := \frac{1}{p_{3n}}, \quad b_n := \frac{1}{p_{3n+1}} \left( \frac{4}{5} - \sum_{i=0}^n \frac{1}{p_{3i}} \right), \quad y \quad c_n := \frac{1}{p_{3n+2}} \left( \frac{6}{7} - \sum_{i=0}^n \frac{1}{p_{3i}} \right).$$

Demostremos que  $M$  es atómico con  $\mathcal{A}(M) = \{a_n, b_n, c_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ . Para probar esto, basta con mostrar que  $\{a_n, b_n, c_n \mid n \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathcal{A}(M)$ . Observe que, para cada  $n \in \mathbb{N}_0$ , el generador  $b_n$  es el único generador con valoración  $p_{3n+1}$ -ádica negativa, de lo cual inferimos que  $b_n$  es un átomo de  $M$ . De manera similar, para cada  $n \in \mathbb{N}_0$ , el generador  $c_n$  es el único generador con valoración  $p_{3n+2}$ -ádica negativa, por lo que  $c_n$  también es un átomo de  $M$ . Para argumentar que  $a_n \in \mathcal{A}(M)$  para cada  $n$ , fijemos  $j \in \mathbb{N}_0$ , y escribamos

$$a_j = \sum_{i=0}^N \alpha_i a_i + \sum_{i=0}^N \beta_i b_i + \sum_{i=0}^N \gamma_i c_i$$

para algún  $N \in \mathbb{N}$  y coeficientes  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{N}_0$  para cada  $i \in [[0, N]]$ . Supongamos, en busca de una contradicción, que existe  $k \in [[0, N]]$  tal que  $\beta_k \neq 0$ . El hecho de que la valoración  $p_{3k+1}$ -ádica de  $a_j$  sea 0, junto con la desigualdad  $p_{3k+1} > n \left( \frac{4}{5} - \sum_{i=0}^k \frac{1}{p_{3i}} \right)$ , garantiza que  $\beta_k$  es un múltiplo de  $p_{3k+1}$ . Como resultado,

$$\frac{1}{p_{3j}} = a_j > \beta_k b_k > \frac{4}{5} - \sum_{i=0}^k \frac{1}{p_{3i}} > \frac{4}{5} - \frac{1}{7} > \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p_n},$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $\beta_i = 0$  para cada  $i \in [[0, N]]$ . De manera similar, podemos argumentar que  $\gamma_i = 0$  para cada  $i \in [[0, N]]$ . Por último, aplicando la valoración  $p_{3i}$ -ádica a ambos lados de la igualdad  $a_j = \sum_{i=0}^N \alpha_i a_i$  para cada  $i \in [[0, N]] \setminus \{j\}$ , obtenemos que  $\alpha_i = 0$  para cualquier  $i \in [[0, N]] \setminus \{j\}$ , y por lo tanto  $a_j$  es un átomo de  $M$ . Por lo tanto,  $\{a_n, b_n, c_n \mid n \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathcal{A}(M)$ , y la afirmación queda demostrada.

Finalmente, demostremos que  $M$  no es un monoide 2-MCD. Para probar esto vamos a demostrar que  $\frac{4}{5}$  y  $\frac{6}{7}$  no tienen un divisor común maximal en  $M$ . Para ello, escribamos  $\frac{4}{5} = q + d$  y  $\frac{6}{7} = r + d$  para algunos  $q, r, d \in M$ . Escribamos también

$$\frac{4}{5} = q + d = \sum_{i=0}^{N'} \alpha'_i a_i + \sum_{i=0}^{N'} \beta'_i b_i + \sum_{i=0}^{N'} \gamma'_i c_i,$$

para algún  $N' \in \mathbb{N}$  y coeficientes  $\alpha'_i, \beta'_i, \gamma'_i \in \mathbb{N}_0$  para cada  $i \in [[0, N']]$ . Como  $\frac{4}{5}$  tiene una valoración 5-ádica negativa,  $\beta'_k \neq 0$  para algún  $k \in [[0, N']]$ .

Ahora el hecho de que la valoración  $p_{3k+1}$ -ádica de  $\frac{4}{5}$  es 0, junto con la desigualdad  $p_{3k+1} > \mathfrak{n}\left(\frac{4}{5} - \sum_{i=0}^k \frac{1}{p_{3i}}\right)$ , implica que  $\beta'_k$  es un múltiplo de  $p_{3k+1}$ . Por lo tanto, cualquier factorización de  $\frac{4}{5}$  contiene al menos  $p_{3k+1}$  copias del átomo  $b_k$  para algún  $k \in \mathbb{N}_0$ . De manera completamente similar, podemos probar que cada factorización de  $\frac{6}{7}$  debe contener al menos  $p_{3\ell+2}$  copias del átomo  $c_\ell$  para algún  $\ell \in \mathbb{N}_0$ .

Procedemos a probar que  $d \in \langle a_n \mid n \in \mathbb{N}_0 \rangle$ . Supongamos, en busca de una contradicción, que una factorización de  $d$  contiene un átomo de la forma  $b_j$  para algún  $j \in \mathbb{N}_0$ . Esto garantizará la existencia de una factorización  $z'$  de  $\frac{6}{7} = r + d$  que contenga al menos una copia del átomo  $b_j$  y, por lo tanto, al menos  $p_{3j+1}$  copias del átomo  $b_j$  (aquí estamos usando una vez más la desigualdad  $p_{3j+1} > \mathfrak{n}\left(\frac{4}{5} - \sum_{i=0}^j \frac{1}{p_{3i}}\right)$ ). Sin embargo, como hemos visto en el párrafo anterior,  $z'$  también debe contener al menos  $p_{3\ell+2}$  copias del átomo  $c_\ell$  para algún  $\ell \in \mathbb{N}_0$ . Por lo tanto

$$\frac{6}{7} \geq p_{3j+1} b_j + p_{3\ell+2} c_\ell = \left(\frac{4}{5} - \sum_{i=0}^j \frac{1}{p_{3i}}\right) + \left(\frac{6}{7} - \sum_{i=0}^{\ell} \frac{1}{p_{3i}}\right) > \frac{6}{7},$$

lo cual es una contradicción (la última desigualdad sale del hecho de que  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p_n} < \frac{1}{7}$ ). Por lo tanto, ninguna factorización de  $d$  en  $M$  contiene un átomo en  $\{b_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ . De manera similar, podemos demostrar que ninguna factorización de  $d$  en  $M$  contiene un átomo en  $\{c_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ . Dado que  $M$  es atómico,  $d \in \langle a_n \mid n \in \mathbb{N}_0 \rangle$ , como se deseaba.

Ahora supongamos que  $z := z_q + z_d$  es una factorización de  $\frac{4}{5}$ , donde  $z_q$  es una factorización de  $q$  y  $z_d$  es una factorización de  $d$ . Como  $z$  debe contener al menos  $p_{3k+1}$  copias del átomo  $b_k$  para algún  $k \in \mathbb{N}_0$ , el hecho de que  $z_d$  no pueda contener ninguna copia del átomo  $b_k$  asegura que  $z_q$  contiene al menos  $p_{3k+1}$  copias del átomo  $b_k$ . Por lo tanto,  $p_{3k+1} b_k = \frac{4}{5} - \sum_{i=0}^k \frac{1}{p_{3i}}$  divide a  $q$  en  $M$ . De manera similar, podemos

demostrar que  $p_{3\ell+2}c_\ell = \frac{6}{7} - \sum_{i=0}^{\ell} \frac{1}{p_{3i}}$  divide a  $r$  en  $M$  para algùn  $\ell \in \mathbb{N}_0$ . De las últimas dos afirmaciones, inferimos que si tomamos  $m \in \mathbb{N}$  con  $m > \max\{k, \ell\}$ , entonces el átomo  $a_m$  es un divisor común de ambos  $q$  y  $r$  en  $M$ , lo que significa que  $d$  no es un divisor común maximal de  $\frac{4}{5}$  y  $\frac{6}{7}$  en  $M$ . Por lo tanto,  $\frac{4}{5}$  y  $\frac{6}{7}$  no tienen un divisor común maximal en  $M$ , y así concluimos que  $M$  no es un monoïde 2-MCD.

En el siguiente resultado demostramos que, a diferencia de la atomicidad, la condición de cadena ascendente de ideales principales (ACCP) asciende de un monoïde Puiseux a su monoïde potencia.

**Proposición 2.4** *Si un monoïde Puiseux  $M$  satisface la ACCP, entonces  $\mathcal{P}_{\text{fin}}(M)$  satisface la ACCP.*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{P} := \mathcal{P}_{\text{fin}}(M)$ . Ahora, consideremos una cadena ascendente de ideales principales  $\{B_n + \mathcal{P}\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  de  $\mathcal{P}$  y demostremos que se estabiliza. Del Lema 2.1 sabemos que existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $|B_n| = |B_N|$  para todo  $n > N$ . Si  $|B_N| = 1$ , entonces  $(B_n + \mathcal{P})_{n \in \mathbb{N}_0}$  se estabiliza ya que  $M$  satisface la ACCP. Supongamos entonces que  $|B_N| > 1$ . Sea  $\{C_n\}_{n > N}$  una sucesión de elementos de  $\mathcal{P}$  que satisface  $C_{n+1} + B_{n+1} = B_n$  para cada  $n \geq N$ . Del Lema 2.1 sabemos que  $|C_n| = 1$  para cada  $n > N$ , y luego podemos escribir  $C_n = \{c_n\}$ , para algùn  $c_n \in M$ . Sean  $b_{1,n}, b_{2,n}, \dots, b_{k,n}$  los elementos de  $B_n$  listados en orden creciente. Observe que  $c_{n+1} + b_{i,n+1} = b_{i,n}$  para cada  $n \geq N$ . Entonces tenemos que  $\{b_{i,n} + M\}_{n \geq N}$  es una cadena ascendente de ideales principales de  $M$  para cada  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ . Ya que  $M$  satisface la ACCP, cada una de esas cadenas de ideales principales se estabiliza. Sea  $t_i$  un entero positivo tal que  $b_{i,n} = b_{i,t_i}$  para cada  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$  y  $n > t_i$ . Llamemos  $t := \max\{t_i \mid 1 \leq i \leq k\}$ . Entonces  $B_n = B_t$  para cada  $n > t$ , y por lo tanto,  $\{B_n + \mathcal{P}\}_{n \in \mathbb{N}}$  se estabiliza. Concluimos que  $\mathcal{P}$  satisface la ACCP.  $\square$

Concluimos esta sección presentando un ejemplo de un monoïde potencia de un monoïde Puiseux que es atómico pero no satisface la ACCP. A partir de la proposición anterior es claro que el correspondiente monoïde de Puiseux no es ACCP.

**Ejemplo 2.5** *Tomemos  $r \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$  con  $\mathfrak{n}(r) \geq 2$ , y consideremos el monoïde Puiseux  $M := \langle r^n \mid n \in \mathbb{N}_0 \rangle$ . Es bien conocido que este monoïde es atómico ([12, Teorema 2,3]). Sin embargo, se puede demostrar que no satisface la ACCP. De hecho, observe que la identidad*

$$x_n := \frac{\mathfrak{n}(r)^n}{\mathfrak{d}(r)^{n-1}} = \frac{\mathfrak{n}(r)^{n+1}}{\mathfrak{d}(r)^n} + \frac{(\mathfrak{d}(r) - \mathfrak{n}(r))\mathfrak{n}(r)^n}{\mathfrak{d}(r)^n}$$

*es cierta para cada  $n \in \mathbb{N}$ , lo que conlleva que la cadena ascendente de ideales principales  $\{x_n + M\}_{n \in \mathbb{N}}$  no se estabiliza. Sea  $\mathcal{P} := \mathcal{P}_{\text{fin}}(M)$  y observe que  $\mathcal{P}$  tampoco*

satisface la ACCP, ya que  $\{X_n + \mathcal{P}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una cadena ascendente de ideales principales de  $\mathcal{P}$  que no se estabiliza, donde  $X_n = \{x_n\}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Ahora, dado que  $M$  es atómico y un monoide MCD (demostrado en [35, Ejemplo 4,3]) sigue del Teorema 2.2 que  $\mathcal{P}$  es atómico. Entonces  $\mathcal{P}$  es un monoide potencia de un monoide Puiseux, que es atómico pero no satisface la ACCP.

## Capítulo 3

# Las propiedades de factorización acotada y finita.

El propósito principal de este capítulo es estudiar las propiedades de factorización acotada y finita en la clase de monoides potencia de monoides Puiseux, prestando especial atención al ascenso de estas propiedades desde un monoide Puiseux a su monoide potencia. Antes de centrarnos en la clase que consiste en todos los monoides potencia de monoides de Puiseux, argumentemos que el monoide potencia restringido de cada monoide de Puiseux es un FFM.

**Proposición 3.1** *El monoide potencia restringido de un monoide Puiseux es un FFM.*

*Demostración.* Sea  $M$  un monoide Puiseux.

Primero, argumentamos que  $\mathcal{P} := \mathcal{P}_{\text{fin},0}(M)$  es atómico. Para hacerlo, fijemos  $X \in \mathcal{P}$  con  $|X| \geq 2$ , y demostremos que  $X$  es atómico en  $\mathcal{P}$ . Procedemos por inducción (fuerte) sobre la cardinalidad de  $X$ . Esto se cumple cuando  $|X| = 2$  ya que cada elemento de tamaño 2 es claramente un átomo de  $\mathcal{P}$ . Tomemos  $k \in \mathbb{N}$  con  $k \geq 2$ , y asumamos que cada elemento de  $\mathcal{P}$  cuyo tamaño pertenece a  $\llbracket 2, k \rrbracket$  es atómico. Supongamos ahora que  $|X| = k + 1$ . Si  $X$  es un átomo, entonces hemos terminado. Por lo tanto, podemos asumir que  $X$  no es un átomo. Entonces, existen  $A, B \in \mathcal{P}$  con  $\max\{|A|, |B|\} < |X|$  tal que  $X = A + B$ . Dado que  $|A| < |X| = k + 1$  y  $|B| < |X| = k + 1$ , sigue de nuestra hipótesis inductiva que tanto  $A$  como  $B$  son elementos atómicos de  $\mathcal{P}$  y, por lo tanto,  $X$  debe ser atómico.

Ahora demostremos que cada elemento de  $\mathcal{P}$  tiene solo un número finito de factorizaciones. Para argumentar esto, fijemos  $X \in \mathcal{P}^\bullet$ . Dado que cada átomo que divide a  $X$  en  $\mathcal{P}$  es un subconjunto de  $X$ , el hecho de que  $X$  sea un conjunto finito implica que hay solo un número finito de átomos que dividen a  $X$  en  $\mathcal{P}$ . Por otro lado, observe que si  $A$  es un átomo que divide a  $X$  en  $\mathcal{P}$ , entonces ningún elemento de la forma

$mA$  puede dividir a  $X$  en  $\mathcal{P}$  siempre que  $m > \max X$ . Al juntar las dos observaciones anteriores, podemos concluir que  $X$  tiene solo un número finito de factorizaciones. Por lo tanto,  $\mathcal{P}$  es un FFM, como se deseaba.  $\square$

Aquí presentamos un ejemplo de un monoide Puiseux cuyo monoide potencia restringido no es ni un HFM ni un LFM.

**Ejemplo 3.2** *Considere el monoide potencia  $\mathcal{P} := \mathcal{P}_{\text{fin},0}(\mathbb{N}_0)$ . Observe que  $\{0,1\} + \{0,1\} + \{0,1\}$  y  $\{0,1\} + \{0,2\}$  son dos factorizaciones del elemento  $\{0,1,2,3\}$  con longitudes diferentes. Por lo tanto,  $\mathcal{P}$  no es un HFM. Por otro lado, observe que  $\{0,1\} + \{0,2\} + \{0,2\}$  y  $\{0,1\} + \{0,1\} + \{0,3\}$  son factorizaciones diferentes del elemento  $\{0,1,2,3,4,5\}$  con la misma longitud. Como consecuencia,  $\mathcal{P}$  no es un LFM.*

Procedemos a argumentar que tanto la propiedad de factorización acotada como la de factorización finita ascienden de cualquier monoide de Puiseux a su monoide potencia.

**Teorema 3.3** *Para un monoide de Puiseux  $M$ , se cumplen las siguientes afirmaciones.*

1. *Si  $M$  es un BFM, entonces  $\mathcal{P}_{\text{fin}}(M)$  también es un BFM.*
2. *Si  $M$  es un FFM, entonces  $\mathcal{P}_{\text{fin}}(M)$  también es un FFM.*

*Demostración.* Sea  $M$  un monoide de Puiseux y  $\mathcal{P} := \mathcal{P}_{\text{fin}}(M)$ .

(1) Supongamos, en busca de una contradicción, que  $M$  es un BFM pero  $\mathcal{P}$  no lo es. Dado que  $M$  es un BFM, debe satisfacer la ACCP, y por lo tanto, de la Proposición 2.4, sigue que  $\mathcal{P}$  también satisface la ACCP. Tenemos entonces que  $\mathcal{P}$  es atómico. Como  $\mathcal{P}$  no es un BFM, debe existir  $B \in \mathcal{P}$  tal que  $L(B)$  no es finito. Del Lema 2.1 sabemos que cada elemento en  $L(B)$  tiene como máximo  $|B|$  átomos de cardinalidad mayor que 1. Por lo tanto, para cada  $k \in \mathbb{N}$  existe un elemento de  $Z(B)$  con al menos  $k$  átomos de cardinalidad 1. Para cada  $k \in \mathbb{N}$  tomemos  $A_{1,k} + A_{2,k} + \dots + A_{n,k} + C_k \in Z(B)$ , para algún  $C_k \in Z(B - A_{1,k} - A_{2,k} - \dots - A_{n,k})$  y  $|A_{i,k}| = 1$ . Escribamos  $|A_{i,k}| = \{a_{i,k}\}$  para cada  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Tomemos  $b$  como un elemento de  $B$ . Entonces, para cada  $k \in \mathbb{N}$  tenemos que  $a_{1,k} + \dots + a_{n,k} \mid_M b$ . Esto, junto con el hecho de que  $M$  es atómico, garantiza que para cada  $k \in \mathbb{N}$  existe una factorización de  $b$  en  $M$  con al menos  $k$  átomos. Como consecuencia,  $L(b)$  no es finito, lo que contradice el hecho de que  $M$  es un BFM.

(2) Supongamos que  $M$  es un FFM. Tomemos un elemento  $B$  en  $\mathcal{P}$  y un entero positivo  $k$ . Demostremos que  $B$  tiene como máximo un número finito de factorizaciones de longitud  $k$ . Para hacerlo, establezcamos

$$C := \{a \in M \mid a \text{ divide a } b \text{ para algún } b \in B\}.$$

Dado que  $B$  es finito, obtenemos del hecho de que  $M$  es un FFM que  $C$  es un conjunto finito. Observe que las factorizaciones de  $B$  en  $\mathcal{P}$  de longitud  $k$  son precisamente los  $k$ -multiconjuntos formados por subconjuntos no vacíos de  $C$ , y está claro que solo hay un número finito de tales multiconjuntos (de hecho, es como máximo el número de  $k$ -tuplas de subconjuntos no vacíos de  $C$ ). Por lo tanto, podemos concluir que  $\mathcal{P}$  es un LFFM. Además, como  $M$  es un BFM, se infiere de la parte (1) que  $\mathcal{P}$  es un BFM. Por lo tanto,  $\mathcal{P}$  es un FFM.  $\square$

Concluimos esta sección mostrando que, a diferencia de las propiedades de factorización acotada y finita, la propiedad de factorización finita por longitud no asciende de un monoide de Puiseux a su monoide potencia. Para hacerlo, reutilizamos el monoide construido en el Ejemplo 2.3.

**Proposición 3.4** *Existe un monoide de Puiseux que es un LFFM cuyo monoide potencia no es un LFFM.*

*Demostración.* Primero, probemos que si  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  y  $\{b_n\}_{n \geq 1}$  son dos sucesiones co-bien ordenadas de racionales positivos, entonces la sucesión  $\{c_n\}_{n \geq 1}$  definida como  $c_{2n} := a_n$  y  $c_{2n-1} = b_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$  también es co-bien ordenada. Supongamos lo contrario, que la sucesión  $\{c_n\}_{n \geq 1}$  no es co-bien ordenada. Entonces podemos encontrar una subsucesión estrictamente creciente  $\{c'_n\}_{n \geq 1}$  de  $\{c_n\}_{n \geq 1}$ . Dado que los términos de  $\{c'_n\}_{n \geq 1}$  son términos de  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  o  $\{b_n\}_{n \geq 1}$ , la sucesión  $\{c'_n\}_{n \geq 1}$  debe contener una subsucesión  $\{c''_n\}_{n \geq 1}$  que también es una subsucesión de  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  o  $\{b_n\}_{n \geq 1}$ . Dado que  $\{c'_n\}_{n \geq 1}$  es estrictamente creciente, también lo es  $\{c''_n\}_{n \geq 1}$ . Ahora, si  $\{c''_n\}_{n \geq 1}$  es una subsucesión de  $\{a_n\}_{n \geq 1}$ , entonces obtenemos una contradicción con el hecho de que  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  es una sucesión co-bien ordenada. De manera similar, si  $\{c''_n\}_{n \geq 1}$  es una subsucesión de  $\{b_n\}_{n \geq 1}$ , obtenemos una contradicción con el hecho de que  $\{b_n\}_{n \geq 1}$  es una sucesión co-bien ordenada.

Por el argumento dado en el párrafo anterior, inferimos que la suma de dos monoides de Puiseux que son co-bien ordenados es de nuevo co-bien ordenado, lo que implica inductivamente que la suma de una cantidad finita de monoides de Puiseux co-bien ordenados es de nuevo un monoide co-bien ordenado. Ahora, tomemos a  $M$  como el monoide de Puiseux construido en el Ejemplo 2.3; es decir,

$$M := \left\langle \frac{1}{p_{3n}}, \frac{1}{p_{3n+1}} \left( \frac{4}{5} - \sum_{i=0}^n \frac{1}{p_{3i}} \right), \frac{1}{p_{3n+2}} \left( \frac{6}{7} - \sum_{i=0}^n \frac{1}{p_{3i}} \right) \mid n \in \mathbb{N}_0 \right\rangle.$$

El monoide  $M$  es generado por la unión del conjunto subyacente de tres secuencias decrecientes, entonces  $M$  puede ser expresado naturalmente como la suma de tres monoides de Puiseux co-bien ordenados. Por lo tanto,  $M$  es un monoide de Puiseux co-bien ordenado. Hemos demostrado en el Ejemplo 2.3 que  $M$  es atómico, y por

lo tanto se tiene de [36, Theorem 3.4] que  $M$  es un LFFM. Por otro lado, también hemos argumentado en el Ejemplo 2.3 que  $M$  no es 2-MCD, y por lo tanto se infiere de la parte (2) del Teorema 2.2 que el monoide potencia de  $M$  no es atómico. En conclusión, el monoide potencia de  $M$  no es un LFFM aunque  $M$  sea un LFFM.  $\square$

# Capítulo 4

## Átomos y otras nociones más débiles que elementos primos

En este capítulo, nos preguntamos cuáles átomos en un monoide potencia restringido de un monoide numérico son átomos fuertes, elementos primos o elementos primarios. Para simplificar la notación, para cualquier monoide reducido  $N$ , nombremos

$$\mathcal{P}(N) := \mathcal{P}_{\text{fin},0}(N).$$

La siguiente observación preliminar nos permitirá reducir la demostración de muchas observaciones atómicas generales sobre  $\mathcal{P}(N)$  al monoide más simple  $\mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$ .

**Proposición 4.1** *Sea  $N'$  un monoide reducido y  $N$  un submonoide de  $N'$ . Entonces, se cumplen las siguientes afirmaciones.*

1.  $\mathcal{P}(N)$  es un submonoide cerrado por divisores de  $\mathcal{P}(N')$ .
2. Para todo  $A \in \mathcal{P}(N)$ , se tiene  $Z_{\mathcal{P}(N)}(A) = Z_{\mathcal{P}(N')}(A)$ .

*Demostración.* (1) Fijemos  $S \in \mathcal{P}(N)$  y supongamos que  $S' \in \mathcal{P}(N')$  divide a  $S$  en  $\mathcal{P}(N')$ . Entonces existe  $T' \in \mathcal{P}(N')$  tal que  $S' + T' = S$ , y así, el hecho de que  $0 \in T'$  asegura que  $S' \subseteq S \subseteq N$ . Por lo tanto  $S' \in \mathcal{P}(N)$ . Así,  $\mathcal{P}(N)$  es un submonoide cerrado por divisores de  $\mathcal{P}(N')$ , como se deseaba.

(2) Dado que  $\mathcal{P}(N')$  es un monoide reducido que contiene a  $\mathcal{P}(N)$  como un submonoide, la inclusión  $Z_{\mathcal{P}(N)}(A) \subseteq Z_{\mathcal{P}(N')}(A)$  se cumple claramente. La inclusión inversa es una consecuencia inmediata del hecho de que  $\mathcal{P}(N)$  es un submonoide cerrado por divisores de  $\mathcal{P}(N')$ .  $\square$

Para nuestro primer resultado principal, necesitamos los siguientes lemas.

**Lema 4.2** *Sea  $N$  un monoide numérico. Para  $S \in \mathcal{P}(N)$  y  $a \in N$ , las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a)  $\{0, a\}$  divide a  $S$  en  $\mathcal{P}(N)$ .

(b) Para cada  $x \in S$ , ya sea  $x - a \in S$  o  $x + a \in S$ .

*Demostración.* (a)  $\Rightarrow$  (b): Asumamos primero que  $\{0, a\}$  divide a  $S$  en  $\mathcal{P}(N)$ , y escribamos  $S = \{0, a\} + S'$  para algún  $S' \in \mathcal{P}(N)$ . Entonces, para cada  $x \in S$ , ya sea  $x \in S'$  o  $x - a \in S'$ . Si  $x \in S'$ , entonces  $x + a \in S$  y si  $x - a \in S'$ , entonces  $x - a = x - a + 0 \in S$ .

(b)  $\Rightarrow$  (a): Por el contrario, supongamos que para cada  $x \in S$  ya sea  $x - a \in S$  o  $x + a \in S$ . Consideremos el conjunto  $S' := \{x \in S \mid x + a \in S\}$ . Para demostrar que  $S \subseteq \{0, a\} + S'$ , primero fijemos  $x \in S$  y notemos que, por hipótesis, ya sea  $x - a \in S$  o  $x + a \in S$ . Si  $x - a \in S$ , entonces sigue de la definición de  $S'$  que  $x - a \in S'$  y así  $x \in a + S' \subseteq \{0, a\} + S'$ . De lo contrario,  $x + a \in S$  y así de la definición de  $S'$ , vemos que  $x \in S' \subseteq \{0, a\} + S'$ . La inclusión  $\{0, a\} + S' \subseteq S$  también sale inmediatamente, ya que tenemos de la definición de  $S'$  que  $0 + S' \subseteq S$  y  $a + S' \subseteq S$ .  $\square$

**Lema 4.3** *Sea  $N$  un monoide numérico. Para  $S \in \mathcal{P}(N)$  y  $a \in N$ , si el elemento  $\{0, a, 2a, \dots, ka\}$  divide a  $S$  en  $\mathcal{P}(N)$  para algún  $k \in \mathbb{N}$ , entonces para cada  $x \in S$  ya sea  $x - a \in S$  o  $x + a \in S$ .*

*Demostración.* Sea  $A := \{0, a, 2a, \dots, ka\}$  para un  $k$  fijo en  $\mathbb{N}$  y asumamos que  $A$  divide a  $S$  en  $\mathcal{P}(N)$ . Escribamos  $S = A + S'$  para algún  $S' \in \mathcal{P}(N)$ . Entonces, para cada  $x \in S$  existe algún  $0 \leq k' \leq k$  tal que  $x - k'a \in S'$ . Por lo tanto, ya sea  $x - k'a + (k' - 1)a = x - a$  o  $x - k'a + (k' + 1)a = x + a$  pertenece a  $S$ , como se deseaba.  $\square$

Estamos en posición de demostrar que  $\mathcal{P}(N)$  no contiene átomos fuertes y, por lo tanto, no tiene elementos primos.

**Proposición 4.4** *El monoide  $\mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$  no tiene átomos fuertes.*

*Demostración.* Definamos  $\mathcal{P} := \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$ . Primero observemos que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , el átomo  $A := \{0, n\}$  no es un átomo fuerte de  $\mathcal{P}$  porque  $\{0, 2n\}$  divide a  $3A$  en  $\mathcal{P}$ .

Procedemos a demostrar que  $A := \{0, n, m\}$  no es un átomo fuerte para ningún  $n, m \in \mathbb{N}$  con  $0 < n < m$  y  $\gcd(n, m) = 1$ . Sea  $B$  el monoide numérico generado por el conjunto  $\{n, m\}$ , y sea  $F(B)$  el número de Frobenius de  $B$ . Definamos  $d := \max(F(B) + 1, m^2 - mn)$ . Ahora fijemos  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $knm \geq 3d$  y demostremos que el elemento  $knA$  no es una molécula.

Tomemos un entero positivo arbitrario  $a > F(B)$  y escribamos  $a = xm + yn$ , donde  $x$  e  $y$  son enteros no negativos tales que la suma  $x + y$  es mínima. Supongamos que

$x + y > kn$ . Entonces  $x > kn - y$ , lo cual podemos sustituir en la expresión  $a = xm + yn$  para obtener

$$a = xm + yn > knm - ym + yn = knm - y(m - n) > knm - m(m - n) = (k + 1)nm - m^2,$$

donde la última desigualdad sigue de la minimalidad de  $x + y$ . Ahora observemos que si  $a$  tiene una factorización de longitud a lo sumo  $kn$  en  $B$ , entonces  $a \leq knm$ . Por lo tanto, vemos que hay a lo sumo

$$knm - ((k + 1)nm - m^2) = m^2 - mn$$

elementos de  $B$  que son a lo sumo  $knm$  pero no tienen factorizaciones de longitud a lo sumo  $kn$  en  $B$ . Por lo tanto, como máximo los últimos  $d - 1$  elementos de  $\llbracket d, knm \rrbracket$  no pertenecen a  $knA$ . Además, la desigualdad  $d > F(B)$  asegura que a lo sumo los primeros  $d - 1$  elementos de  $\llbracket 0, knm - d \rrbracket$  tampoco pertenecen a  $knA$ . Por lo tanto,  $\llbracket d, knm - d \rrbracket \subseteq knA$ . Además, el intervalo entero  $\llbracket d, knm - d \rrbracket$  tiene al menos  $d$  elementos. Podemos inferir ahora que para cada entero  $s \in \llbracket 0, knm \rrbracket$  ya sea  $s - d$  o  $s + d$  es un elemento de  $knA$ . Como consecuencia, sigue del Lema 4.2 que  $\{0, d\} \mid_{\mathcal{P}} knA$  y, por lo tanto,  $knA$  no es una molécula, por lo que  $A$  no es un átomo fuerte de  $\mathcal{P}$ .

Ahora tomemos un elemento arbitrario  $X = \{0, x_1, \dots, x_\ell\} \in \mathcal{P}$  con  $\ell > 2$  y  $\gcd(x_1, \dots, x_\ell) = 1$ . Podemos ver que existe un  $r \in \mathbb{N}$  tal que  $rX$  contiene un elemento  $x$  que es coprimo con  $rx_\ell$ : esto sale fácilmente después de tomar  $p, p' \in \mathbb{N}$  lo suficientemente grandes para garantizar que  $x_\ell^p + 1 \in x_\ell^{p'} X$ . Ahora definamos  $A := \{0, x, rx_\ell\}$ . Ya habíamos demostrado que existen  $d \in \mathbb{N}$  y un  $t \in \mathbb{N}$  suficientemente grande tal que ya sea  $s - d$  o  $s + d$  pertenece a  $tA$  para cada  $s \in \llbracket 0, trx_\ell \rrbracket$ . Además, lo mismo es cierto para  $trX$  ya que  $tA \subset trX$ . Por lo tanto, en virtud del Lema 4.2, deducimos que  $\{0, d\} \mid_{\mathcal{P}} trX$ , de donde  $X$  no es un átomo fuerte.

Finalmente, tomemos un elemento arbitrario  $X = \{0, x_1, \dots, x_\ell\} \in \mathcal{P}$ , con  $\ell \geq 2$ . Luego definamos  $g = \gcd(x_1, \dots, x_\ell)$  y  $X' := \{0, x_1/g, \dots, x_\ell/g\}$ . Ya hemos demostrado que  $\{0, d\}$  divide a alguna potencia de  $X'$  para algún  $d \in \mathbb{N}$ . Entonces  $\{0, gd\}$  divide a alguna potencia de  $X$ , y por lo tanto  $X$  no puede ser un átomo fuerte. Por lo tanto, el conjunto de átomos fuertes de  $\mathcal{P}$  es el vacío.  $\square$

Ahora utilizaremos el resultado de la Proposición 4.1 para extender el resultado anterior al monoide potencia de cualquier monoide numérico.

**Proposición 4.5** *Sea  $N$  un monoide numérico. El monoide  $\mathcal{P}(N)$  no tiene átomos fuertes.*

*Demostración.* De la Proposición 4.1(b) se deduce fácilmente que  $\mathcal{A}(\mathcal{P}(N)) = \mathcal{A}(\mathcal{P}(\mathbb{N}_0)) \cap \mathcal{P}(N)$  y que  $\mathcal{M}(\mathcal{P}(N)) = \mathcal{M}(\mathcal{P}(\mathbb{N}_0)) \cap \mathcal{P}(N)$ . Por tanto, el conjunto de átomos fuertes de  $\mathcal{P}(N)$  es el mismo que el de  $\mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$ , el cual demostramos en la Proposición 4.4 que es el vacío.  $\square$

Obtenemos inmediatamente el siguiente corolario.

**Corolario 4.6** *El conjunto de primos del monoide  $\mathcal{P}(N)$  es el vacío, para cualquier monoide numérico  $N$ .*

Ahora que sabemos que los monoides de potencia de monoides numéricos no tienen primos, es inmediato plantearse la pregunta de si los mismos monoides contienen elementos primarios ya que, después de todo, el concepto de elemento primario es una de las debilitaciones más naturales de la definición de elemento primo. De hecho introduciremos un concepto más general que el de elemento primario y demostraremos que en efecto que no existen tales elementos en los monoides potencia de monoides numéricos.

**Definición 4.7** *Llamamos a un elemento  $x$  en algún monoide  $M$  completamente primario si siempre que  $x \mid_M r + s$  para algunos  $r, s \in M$ , entonces existe algún  $k \in \mathbb{N}$  tal que o bien  $x \mid_M kr$  o  $x \mid_M ks$ .*

Es fácil ver que todo elemento primario es también completamente primario. Demostremos ahora el siguiente lema que servirá de apoyo en la demostración del próximo resultado importante.

**Lema 4.8** *Sea  $M$  un monoide conmutativo escrito aditivamente. Si  $x \in M$  es completamente primario entonces  $kx$  es completamente primario para cualquier  $k \in \mathbb{N}$ .*

*Demostración.* Fijemos  $k \in \mathbb{N}$  y supongamos que  $x$  es completamente primario y que  $kx \mid r + s$  para algunos  $r, s \in M$ . Entonces  $x \mid r + s$  lo que implica que existe algún  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $x \mid mr$  o  $x \mid ms$ . Entonces o bien  $kx \mid kmr$  o  $kx \mid kms$ , de donde deducimos que  $kx$  es completamente primario.  $\square$

Estamos en posición de generalizar el Corolario 4.6, demostrando que los monoides potencia de monoides numéricos no tienen elementos completamente primarios.

**Proposición 4.9** *Sea  $N$  un monoide numérico. El monoide potencia  $\mathcal{P}(N)$  no tiene elementos completamente primarios.*

*Demostración.* Primero demostremos que el elemento  $t\{0, m\}$  no es completamente primario para ningún  $t \in \mathbb{N}$ ,  $m \in N$ . Fijemos  $t \in \mathbb{N}$ ,  $m \in N$  y definamos  $P := t\{0, m\}$ . Observemos que  $P$  no divide a ninguna potencia de  $A := t\{0, 2m, 3m\}$  ya que  $m \notin kA$  para ningún  $k \in \mathbb{N}$ . Ahora definamos  $B := t\{0, m, 3m\}$ . Tomemos cualquier  $k \in \mathbb{N}$  y notemos que  $3ktm$  y  $3(k-1)tm + 3(t-1)m + m = 3ktm - 2m$  son los elementos más grandes en  $kB$ , y así  $3ktm - m \notin kB$ . Por lo tanto, del Lema 4.3 deducimos que  $P \nmid kB$  para ningún  $k \in \mathbb{N}$ . Sin embargo, es fácil ver que  $P$  divide al elemento

$A + B = \{0, m, 2m, \dots, 6tm\}$ , y por lo tanto,  $P$  no es completamente primario ya que no divide a ninguna potencia de  $A$  o  $B$ .

Ahora tomemos algún elemento arbitrario  $A$  de  $\mathcal{P}(N)$  que no sea una potencia de  $\{0, m\}$  para ningún  $m \in \mathbb{N}$ . Demostremos que  $A$  no es completamente primario. Sean  $t_1, t_2, \dots, t_n$  los elementos no nulos de  $A$ , tomados en orden creciente. Del Lema 4.8 sabemos que si  $A$  es completamente primario entonces  $2A$  es completamente primario también. Entonces podemos asumir sin pérdida de generalidad que  $2t_1 \in A$  (después de reemplazar  $A$  por  $2A$  si es necesario). Definamos  $B := \{0, t_2, t_3, \dots, t_n\}$  y  $C := \{0, t_1\}$ , los cuales claramente son elementos de  $\mathcal{P}(N)$ . Observemos que  $A + C = B + C$ . Esto se cumple ya que el único par de elementos en  $A \times C$  que no está en  $B \times C$  es  $(t_1, t_1)$ , pero su suma es  $2t_1$  que está en  $B + C$ . Sin embargo, es fácil ver que  $A$  no divide a ninguna potencia de  $B$ . Además, dado que  $A$  no es una potencia de  $C$  por hipótesis, contiene algún elemento que no es de la forma  $kt_1$ , y por lo tanto no puede dividir a ninguna potencia de  $C$  tampoco. Por lo tanto,  $A$  no es completamente primario, lo que concluye nuestra prueba.  $\square$

**Corolario 4.10** *Sea  $N$  un monoide numérico. El monoide potencia  $\mathcal{P}(N)$  no tiene elementos primarios.*

## Capítulo 5

# Una separación escalonada del conjunto de átomos del monoide potencia restringido de un monoide numérico

En este capítulo, proponemos una separación natural en subconjuntos del conjunto de átomos del monoide potencia de cualquier monoide numérico dado, y analizamos los tamaños de estos subconjuntos. Al igual que en el capítulo anterior nombramos por simplicidad  $\mathcal{P}(N) := \mathcal{P}_{\text{fin},0}(N)$ , para cualquier monoide reducido  $N$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}_0$ , definimos  $\alpha_{n,k}(N) := |A_{n,k}(N)|$ , donde

$$A_{n,k}(N) := \{A \in \mathcal{A}(\mathcal{P}(N)) \mid \text{máx } A \leq n \text{ y } |A| = k\}$$

para cada entero  $k$  con  $1 \leq k \leq n+1$ . Estamos interesados en el comportamiento de la sucesión bidimensional  $\{\alpha_{n,k}(N)\}$  (forma simple de denotar la sucesión finita de sucesiones  $\{\{\alpha_{n,k}(N)\}_{n \in \mathbb{N}_0}\}_{1 \leq k \leq n+1}$ ).

Por simplicidad denotemos  $A_{n,k} := A_{n,k}(\mathbb{N}_0)$  y  $\alpha_{n,k} := |A_{n,k}|$ . La primera sección de este capítulo va dedicada a mostrar un algoritmo que calcule las primeras  $n$  filas de la distribución en forma de triángulo de Pascal de los números  $\alpha_{n,k}$ ; así como de demostrar su correctitud y su complejidad temporal.

## 5.1. Algoritmo que calcula $\{\alpha_{n,k}\}$

A lo largo de esta sección nos referiremos a  $\mathcal{P}_{\text{fin},0}(\mathbb{N}_0)$  solo como  $\mathcal{P}$ , y siempre que se escriba explícitamente un elemento  $A \in \mathcal{P}$  en la forma  $A = \{0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$  se asume que  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ .

Comenzaremos esta sección demostrando que existe una biyección  $f$  entre  $\mathcal{P}$  y el conjunto de todos los enteros positivos impares, o sea  $N := 2\mathbb{N}_0 + 1$ . En efecto, la forma explícita de  $f$  está dada por

$$f(A) = \sum_{b \in A} 2^b.$$

Demostremos que esta aplicación es inyectiva. Tomemos dos elementos diferentes  $A, B \in \mathcal{P}$ , donde  $A = \{0, x_1, \dots, x_n\}$  y  $B = \{0, x'_1, \dots, x'_n\}$ . Nótese que se asumió que la cantidad de elementos de ambos es la misma ya que de lo contrario se tendría que la cantidad de bits activos de  $f(A)$  y  $f(B)$  sería distinta. Sean  $x_k \neq x'_k$  los primeros elementos que difieren en  $A$  y  $B$ . Supongamos, sin perder generalidad, que  $x_k < x'_k$ . Entonces tenemos que  $f(A)$  tiene a  $x_k$  como bit activo, mientras que  $f(B)$  no, de donde  $f(A) \neq f(B)$ .

Para ver que esta aplicación es además sobreyectiva, tomemos cualquier entero impar  $s$ . Sea  $A = \{x_0, \dots, x_n\}$  el conjunto de los bits activos de  $s$ , tomados en orden ascendente. Es fácil ver que  $x_0 = 0$  ya que  $s$  es impar. Por tanto  $f(A) = s$  y se tiene que  $f$  es sobreyectiva. Además, queda claro de este argumento que  $f^{-1}(s)$  es precisamente el conjunto de bits activos de  $s$ .

Ahora definamos una operación sobre los elementos de  $N$ . Sean  $s, t \in N$ , denotaremos por

$$s +' t = s2^{b_0} \vee s2^{b_1} \vee \dots \vee s2^{b_n},$$

donde  $\{b_0, b_1, \dots, b_n\}$  es el conjunto de bits activos de  $t$ .

Dada la operación definida tenemos que  $(N, +')$  es un monoide, siendo el 1 el elemento neutro. Demostremos ahora que este es isomorfo a  $\mathcal{P}$  bajo la aplicación  $f$ . Para ello probemos que  $f(A) +' f(B) = f(A + B)$ . Sea  $A = \{0, a_1, \dots, a_n\}$  y  $B = \{0, b_1, \dots, b_{n'}\}$ . Sabemos por definición que  $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ , pero este conjunto también lo podemos expresar como la siguiente unión de conjuntos

$$A + B = \bigcup_{b \in B} (A + b) = \bigcup_{b \in B} \{a + b \mid a \in A\}.$$

Ahora, de la definición tenemos que  $f(A) +' f(B) = \bigvee_{b \in B} (f(A) * 2^b)$ , dado que  $b$  es un bit activo de  $f(B)$ , por cada  $b \in B$ . Es fácil ver que  $f(X \cup X') = f(X) \vee f(X')$ , ya que el conjunto de bits activos que resulta de hacer un or-lógico es precisamente la unión de los conjuntos de bits activos de los operandos, lo cual sale directamente de

la definición. Esto último se puede extender por inducción para un número finito de conjuntos en la forma  $f(X_1 \cup \dots \cup X_n) = f(X_1) \vee \dots \vee f(X_n)$ . Además,  $f(\{a + b \mid a \in A\}) = f(A) * 2^b$ , para cualquier  $A \in \mathcal{P}$  y cada  $b \in \mathbb{N}_0$ . Por tanto tenemos que

$$f(A + B) = f\left(\bigcup_{b \in B} (A + b)\right) = \vee_{b \in B} f(A + b) = \vee_{b \in B} (f(A) * 2^b) = f(A) +' f(B).$$

Ahora podemos invertir el orden de  $A$  y  $B$  en la cadena de igualdades anterior para obtener que  $f(B) +' f(A) = f(A + B) = f(A) +' f(B)$ , de donde obtenemos que  $(N, +')$  es un monoide conmutativo isomorfo a  $\mathcal{P}$ .

Ahora sea

$$C_{n,k} = \{s \in \mathcal{A}(N) \mid \log_2(s) \leq n \text{ y } \text{bitcnt}(s) = k\},$$

donde  $\text{bitcnt}(s)$  denota la cantidad de bits activos en  $s$ . Es fácil ver que  $f(A_{n,k}) = C_{n,k}$  y  $\alpha_{n,k} = |C_{n,k}|$ . Por lo tanto, podemos encontrar las cantidades  $\alpha_{n,k}$ , buscando los átomos del monoide  $N$ . Se ha hecho esta transformación del objeto de estudio dado que este nuevo es más sencillo de trabajar computacionalmente, ya que sus elementos son enteros positivos.

Dado un  $n$  específico se puede observar que todos los enteros positivos  $s$  entre 1 y  $2^{n+1} - 1$  cumplen que  $\log_2(s) \leq n$ . Entonces el algoritmo propuesto consta de dos partes, primero determinaremos por cada entero en el rango visto si este constituye o no un átomo y luego contamos la cantidad de átomos en cada subconjunto  $C_{n,k}$ .

La propuesta hecha para la primera parte funciona de forma similar a la Criba de Eratostenes usada para determinar los números primos. Para ello podemos contar con una estructura lineal, como un *array*, que contenga por cada entero positivo en este rango un valor booleano que nos va a indicar si este número es o no un átomo. Inicialmente decimos que todos los elementos son átomos y a menudo que encontremos divisores de los mismos, los vamos marcando como no átomos. Esto lo hacemos iterando primero por cada entero positivo  $x_1$  en el rango visto, en orden creciente, y por cada uno iteramos nuevamente por los enteros positivos  $x_2$ , mayores o iguales que este, marcando al elemento  $x_1 +' x_2$  como no átomo.

A continuación se presenta una implementación de un método que materializa la primera parte del algoritmo, descrita en el párrafo anterior. La misma fue hecha en C++, dada la rapidez que tiene este lenguaje para hacer cálculos como los necesarios en este algoritmo.

```

1 void calculate_atoms(int row_no)
2 {
3     int mx = 1LL << (row_no + 1); // 2^(n + 1)
4     for(int x_1 = 3; x_1 < mx; x_1+=2)
5     {
6         if(no_atom[x_1]) continue;
7         auto active_bits = get_active_bits(x_1);
8         for(int x_2 = x_1; ; x_2 +=2)

```

```

9         {
10             int result = 0; // x_1 +' x_2
11             for(int &b : active_bits)
12             {
13                 result |= (x_2 * (1LL << b)); // x_2 * 2^b
14             }
15             if(result >= mx)
16                 break;
17             no_atom[result] = true;
18         }
19     }
20 }

```

La variable de entrada del método es el  $n$  mencionado anteriormente, correspondiente al número de filas que se quiere calcular. El método hace básicamente lo que se explicó anteriormente. La variable  $mx := 2^{n+1}$  es utilizada como supremo (excluyente) de los elementos a analizar. La condición de la línea 6 se añade para optimizar, ya que si un elemento tiene un divisor propio, este tiene un divisor propio que es un átomo, por tanto en el primer ciclo solo nos interesa iterar por los átomos. El método `get_active_bits` simplemente obtiene el conjunto de bits activos del número pasado como argumento. Entre las líneas 10 y 14 se calcula  $x_1 +' x_2$ . Es fácil ver que si  $x_1 +' x_2 \geq mx$ , entonces  $x_1 +' x'_2 \geq mx$  para todo  $x'_2 > x_2$ , lo cual justifica que rompamos el segundo ciclo cuando se cumpla esta condición en la línea 15.

La segunda parte del algoritmo es más sencilla. Dado un  $n \in \mathbb{N}_0$ , lo que se quiere es obtener la sucesión  $\alpha_{n,1}, \dots, \alpha_{n,n+1}$ . Para ello solamente se debe iterar por todos los átomos hallados, y en dependencia de la cantidad de bits activos del número, adicionarlo al contador correspondiente. A continuación mostramos el código correspondiente.

```

1     vector<int> get_alpha_n(int row_no)
2     {
3         vector<int> n_k(row_no + 1);
4         for(int i = 1; i < (1LL << row_no); i ++)
5         {
6             int element = i * 2 + 1;
7             if(!no_atom[element])
8             {
9                 n_k[__builtin_popcount(element) - 1] ++;
10            }
11        }
12        return n_k;
13    }

```

En el código la lista  $n_k$  es la que contiene al final los valores  $\alpha_{n,1}, \dots, \alpha_{n,n+1}$  y la función `__builtin_popcount` es un método de C++ usado para determinar la cantidad de bits activos en la representación binaria de un número.

Solo resta hallar la complejidad de ambos métodos. Para el primer método primero veamos que  $2 * (x_1 + 'x_2) > x_1 x_2$ . Esto se puede comprobar fácilmente si tomamos logaritmo en base 2 en ambos lados de la expresión. Por tanto,  $x_2 < 2 * 2^{n+1} / x_1$  ya que  $x_1 + 'x_2 < 2^{n+1}$ . La complejidad temporal del primer método recae en la cantidad de iteraciones que en total hace el segundo ciclo for, la cual es menor que

$$\sum_{i=1}^{2^n} \frac{2^{n+2}}{2i+1} = 2^{n+2} \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{2i+1} = O(n2^n);$$

más el costo de los llamados a *get\_active\_bits*, cada uno de los cuales tiene un costo temporal de  $O(n)$ , para una complejidad total de  $O(n2^n)$ . El resto de operaciones son manejadas a bajo nivel en la CPU y por tanto son  $O(1)$  (razón por la cual se escogió C++ como lenguaje de programación).

Para el caso del segundo método es fácil ver que la complejidad es  $O(2^n)$ , ya que la función *\_\_builtin\_popcount* también funciona en  $O(1)$ , ya que se ejecuta a bajo nivel en la CPU.

La complejidad espacial del algoritmo es  $O(2^n)$  dado que el *array* que mantiene la información de cuáles elementos son o no átomos tiene tamaño  $2^{n+1}$ .

En la práctica las primeras 25 filas del triángulo pueden ser halladas en menos de 1 minuto y con un uso de memoria inferior a *1GB*. Mientras que las primeras 30 conllevan unos 30 minutos de corrida del algoritmo y menos de *3GB* de memoria.

## 5.2. Análisis del comportamiento de $\{\alpha_{n,k}\}$

A partir del algoritmo anterior pudimos hacer un estudio de patrones en el comportamiento de la sucesión  $\{\alpha_{n,k}\}$ , al menos sobre las primeras 30 filas, con la idea de extenderlos a todo  $\{\alpha_{n,k}(N)\}$  para cualquier monoide numérico  $N$ . La figura 5.1 muestra las 10 primeras filas del triángulo hallado por el algoritmo.

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 0 & & & \\
 & & & & 0 & 1 & & \\
 & & & 0 & 2 & 0 & & \\
 & & 0 & 3 & 2 & 0 & & \\
 & 0 & 4 & 4 & 2 & 0 & & \\
 & 0 & 5 & 8 & 6 & 0 & 0 & \\
 & 0 & 6 & 12 & 14 & 6 & 0 & 0 \\
 & 0 & 7 & 18 & 26 & 20 & 6 & 0 & 0 \\
 & 0 & 8 & 24 & 44 & 48 & 27 & 3 & 0 & 0 \\
 & 0 & 9 & 32 & 68 & 98 & 76 & 37 & 2 & 0 & 0
 \end{array}$$

Figura 5.1: Primeras 10 filas de  $\{\alpha_{n,k}\}$ .

La primera observación que podemos hacer es que cada diagonal hacia el sureste eventualmente consiste solo de ceros.

**Proposición 5.1** *Sea  $N$  un monoide numérico. Para cada  $k \in \mathbb{N}_0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}_0$  tal que para cada  $n \geq n_0$ , la igualdad  $\alpha_{n,n-k}(N) = 0$  se cumple.*

*Demostración.* Primero, observemos que si para algún  $n_0 \in \mathbb{N}_0$  el conjunto  $A_{n,k}$  está vacío para cada  $n \geq n_0$ , entonces el hecho de que  $\mathcal{A}(\mathcal{P}(N)) = \mathcal{P}(N) \cap \mathcal{A}(\mathcal{P}(\mathbb{N}_0))$ , el cual se deduce de la Proposición 4.1, garantizaría que  $A_{n,k}(N)$  también está vacío para cada  $n \geq n_0$ . Por lo tanto, basta con demostrar la proposición cuando  $N = \mathbb{N}_0$ .

Fijemos  $k \in \mathbb{N}_0$ , y consideremos los elementos de  $A_{n,n-k}$ . Fijemos  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\log_2 n_0 \geq \binom{k+1}{2} + 2k + 3$ . Demostraremos que para cada  $n \geq n_0$ , se cumple la igualdad  $\alpha_{n,n-k} = 0$ . Supongamos, para llegar a una contradicción, que  $\alpha_{n,n-k} > 0$ , y tomemos  $S \in A_{n,n-k}$ . Entonces  $S \subseteq \llbracket 0, n \rrbracket$  y  $|S| = n - k$ .

Dado que  $n - k > 2$ , vemos que  $S$  no es un átomo de la forma  $\{0, a\}$  para ningún  $a \in \llbracket 1, n \rrbracket$  y, por lo tanto,  $S$  no puede ser divisible en  $\mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$  por ningún átomo de cardinalidad 2. Como resultado, el Lema 4.2 garantiza, para cada  $a \in \llbracket 1, \lfloor \frac{n}{4} \rfloor \rrbracket$ , la

existencia de  $x_a \in S$  tal que  $x_a \pm a \notin S$ . Para cada  $a \in \llbracket 1, \lfloor \frac{n}{4} \rfloor \rrbracket$ , el hecho de que  $x_a + a \notin S$  (respectivamente,  $x_a - a \notin S$ ) asegura que o bien  $x_a + a \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus S$  o  $x_a + a > n$  (respectivamente, o bien  $x_a - a \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus S$  o  $x_a - a < 0$ ). Sin embargo, para cada  $a \in \llbracket 1, \lfloor \frac{n}{4} \rfloor \rrbracket$ , tenemos que  $(x_a + a) - (x_a - a) = 2a < n$ , y por lo tanto ambas desigualdades  $x_a - a < 0$  o  $x_a + a > n$  no pueden sostenerse simultáneamente. Por lo tanto, después de definir

$$A_1 := \left\{ a \in \llbracket 1, \lfloor \frac{n}{4} \rfloor \rrbracket \mid x_a \pm a \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus S \right\},$$

$$A_2 := \left\{ a \in \llbracket 1, \lfloor \frac{n}{4} \rfloor \rrbracket \mid x_a + a \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus S \text{ y } x_a - a < 0 \right\}, \text{ y}$$

$$A_3 := \left\{ a \in \llbracket 1, \lfloor \frac{n}{4} \rfloor \rrbracket \mid x_a - a \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus S \text{ y } x_a + a > n \right\},$$

vemos que  $\llbracket 1, \lfloor \frac{n}{4} \rfloor \rrbracket = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ .

Primero, supongamos que  $a \in A_1$  y, por lo tanto,  $x_a \pm a \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus S$ . Entonces, en virtud de la igualdad  $a = \frac{(x_a + a) - (x_a - a)}{2}$ , el elemento  $a$  puede escribirse como la mitad de la distancia entre dos elementos distintos en  $\llbracket 0, n \rrbracket \setminus S$ . Por lo tanto, el hecho de que  $\llbracket 0, n \rrbracket \setminus S$  tenga tamaño  $k + 1$ , asegura que  $|A_1| \leq \binom{k+1}{2}$ .

Ahora supongamos que  $a \in A_2$ . En este caso,  $x_a - a < 0$  y  $x_a + a \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus S$ , por lo que  $x_a + a < 2a$  y  $a \leq x_a + a$ ; es decir,  $\frac{x_a + a}{2} < a \leq x_a + a$ . Por otro lado, supongamos que  $a \in A_3$ , y por lo tanto que  $x_a - a \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus S$  y  $x_a + a > n$ . En este caso, ambas desigualdades  $n - x_a < a$  y  $x_a \leq n$  se cumplen, y por lo tanto obtenemos que  $\frac{n - (x_a - a)}{2} < a \leq n - (x_a - a)$ . Como consecuencia, para cada  $a \in A_2 \cup A_3$ , podemos elegir  $y_a \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus S$  tal que, o bien  $\frac{y_a}{2} < a \leq y_a$  o  $\frac{n - y_a}{2} < a \leq n - y_a$ , y así existen  $y_1, \dots, y_{2k} \in \llbracket 0, n \rrbracket$  tales que

$$A_2 \cup A_3 \subseteq \bigcup_{i=1}^{2k} \left( \frac{y_i}{2}, y_i \right]. \quad (5.1)$$

Ahora, consideremos el conjunto  $A := \left\{ 2^j \mid j \in \llbracket 0, \binom{k+1}{2} + 2k + 1 \rrbracket \right\}$ . Dado que  $n \geq n_0$  y  $\log_2 n_0 \geq \binom{k+1}{2} + 2k + 3$ , vemos que  $A \subseteq \llbracket 1, \lfloor \frac{n}{4} \rfloor \rrbracket$ . Esto, junto con  $\llbracket 1, \lfloor \frac{n}{4} \rfloor \rrbracket = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ , garantiza que  $A \subseteq A_1 \cup (A \cap (A_2 \cup A_3))$ . Notemos que, para cada  $y \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , el intervalo  $\left( \frac{y}{2}, y \right]$  contiene a lo sumo una potencia de 2 y, como consecuencia,  $|A \cap \left( \frac{y_i}{2}, y_i \right]| \leq 1$  para cada  $i \in \llbracket 1, 2k \rrbracket$ . Por lo tanto, a raíz de (5.1), obtenemos que

$$\binom{k+1}{2} + 2k + 2 = |A| \leq |A_1| + |A \cap (A_2 \cup A_3)| \leq |A_1| + \left| \bigcup_{i=1}^{2k} A \cap \left( \frac{y_i}{2}, y_i \right] \right| \leq \binom{k+1}{2} + 2k,$$

lo que es una contradicción. Como resultado  $\alpha_{n, n-k} = |A_{n, n-k}| = 0$  para cada entero  $n$  con  $n \geq n_0$ .  $\square$

Como resultado principal de esta sección probaremos que, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , las secuencias  $\{\alpha_{n,k}\}_{n \geq 1}$  y  $\left\{\binom{n}{k}\right\}_{n \geq 1}$  son asintóticamente equivalentes. Primero, necesitamos argumentar el siguiente lema.

**Lema 5.2** *Para  $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)^\bullet$ , son ciertas las siguientes afirmaciones.*

1.  $|A + B| \geq |A| + |B| - 1$ .
2.  $|A + B| = |A| + |B| - 1$  si y solo si existe  $c \in \mathbb{N}$  tal que  $A = c\llbracket 0, |A| - 1 \rrbracket$  y  $B = c\llbracket 0, |B| - 1 \rrbracket$ , en cuyo caso,  $A + B = c\llbracket 0, |A| + |B| - 2 \rrbracket$ .

*Demostración.* (1) Tomemos  $A, B \in \mathcal{P}_{\text{fin},0}(\mathbb{N}_0)$ , y definamos  $n := |A|$  y  $m := |B|$ . Ahora sean  $a_1, \dots, a_{n-1}$  y  $b_1, \dots, b_{m-1}$  los enteros positivos con  $a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1}$  y  $b_1 < b_2 < \dots < b_{m-1}$  tales que  $A := \{0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$  y  $B := \{0, b_1, b_2, \dots, b_{m-1}\}$ . Observemos que

$$S := \{0\} \cup \{a_j, a_{n-1} + b_k \mid j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \text{ y } k \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket\}$$

es un subconjunto de  $A + B$ . Dado que  $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_{n-1} + b_1 < a_{n-1} + b_2 < \dots < a_{n-1} + b_{m-1}$ , se tiene que  $|S| = n + m - 1$ , lo que implica que  $|A + B| \geq n + m - 1 = |A| + |B| - 1$ .

(2) Para la implicación directa, suponga que  $|A + B| = |A| + |B| - 1$ . Tomemos  $A, B$  y  $S$  como en la parte anterior, y definamos  $a_0 = b_0 = 0$ . Debido a que  $S \subseteq A + B$  y  $|S| = |A| + |B| - 1 = |A + B|$ , tenemos que  $S = A + B$ . Demostremos que  $A = b_1\llbracket 0, |A| - 1 \rrbracket$ . Si  $|A| = 2$ , entonces nuestra hipótesis sigue inmediatamente, ya que en otro caso tenemos que  $b_1 = 0 + b_1 \in A + B$ , pero  $b_1 \notin S$ . Ahora asumamos que  $|A| \geq 3$ . Observemos que  $a_{n-2} + b_1$  es un elemento de  $S$  que satisface que  $a_{n-2} < a_{n-2} + b_1 < a_{n-1} + b_1$ , por lo que el hecho de que  $\llbracket a_{n-2} + 1, a_{n-1} + b_1 - 1 \rrbracket \cap S = \{a_{n-1}\}$  garantiza que  $a_{n-1} = a_{n-2} + b_1$ . Supongamos, por principio del buen orden, que  $k$  es el menor elemento en  $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$  tal que la igualdad  $a_k = a_{k-1} + b_1$  se cumple. Dado que  $a_{k-2} + b_1 \in S$  y  $a_{k-2} < a_{k-2} + b_1 < a_{k-1} + b_1 = a_k$ , obtenemos de  $\llbracket a_{k-2} + 1, a_k - 1 \rrbracket \cap S = \{a_{k-1}\}$  que  $a_{k-1} = a_{k-2} + b_1$ , lo cual contradice la minimalidad de  $k$ . Por lo tanto, concluimos que  $a_k = a_{k-1} + b_1$  para cada  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . Esto implica que  $a_k = kb_1$  para cada  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , y así  $A = b_1\llbracket 0, |A| - 1 \rrbracket$ . En particular, vemos que  $a_1 = b_1$ . De manera similar, podemos probar que  $B = a_1\llbracket 0, |B| - 1 \rrbracket$ , y luego solo necesitamos hacer  $c = a_1$ .

En sentido contrario, es fácil ver que si  $A = c\llbracket 0, |A| - 1 \rrbracket$  y  $B = c\llbracket 0, |B| - 1 \rrbracket$  para algún  $c \in \mathbb{N}$ , entonces  $A + B = c\llbracket 0, |A| + |B| - 2 \rrbracket$ .  $\square$

Estamos en posición de establecer el resultado principal de esta sección.

**Teorema 5.3**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{n,k}}{\binom{n}{k-1}} = 1$  para todo  $k \geq 2$  fijo.

*Demostración.* Fijemos  $k \in \mathbb{N}$  con  $k \geq 2$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , denotemos por  $S_{n,k}$  al conjunto que consiste en todos los subconjuntos de  $\mathbb{N}_0$  que contienen 0, tienen un elemento máximo menor o igual a  $n$ , y tienen exactamente  $k$  elementos: claramente,  $|S_{n,k}| = \binom{n}{k-1}$  y

$$A_{n,k} = \{A \in S_{n,k} \mid A \in \mathcal{A}(\mathcal{P}(\mathbb{N}_0))\}.$$

Dividimos el resto de la demostración en dos casos.

**CASO 1:**  $k = 2$ . En este caso,  $S_{n,2} = \{\{0, m\} \mid 1 \leq m \leq n\}$ . Probemos que  $\{0, m\}$  es un átomo en  $\mathcal{P}_{\text{fin},0}(\mathbb{N}_0)$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ . Supongamos, para llegar a una contradicción, que  $\{0, m\}$  no es un átomo en  $\mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$  para algún  $m \in \mathbb{N}$ . Entonces podemos elegir  $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)^\bullet$  tal que  $A + B = \{0, m\}$ . La condición  $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)^\bullet$  garantiza las desigualdades  $|A| \geq 2$  y  $|B| \geq 2$ , y por lo tanto tenemos que  $|A| + |B| - 1 \geq 3$ . Así,  $|A + B| \geq 3$  en virtud del Lema 5.2, contradiciendo que  $A + B = \{0, m\}$ . Por lo tanto, todos los elementos de  $S_{n,2}$  deben ser átomos en  $\mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$ , lo que implica que  $S_{n,2} = A_{n,2}$  y  $\alpha_{n,2} = |S_{n,2}| = \binom{n}{2-1} = n$ . Por lo tanto  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{n,2} / \binom{n}{1} = 1$ , como se deseaba.

**CASO 2:**  $k \geq 3$ . Para este caso, probaremos que para cada  $n \in \mathbb{N}$  la desigualdad  $|S_{n,k} \setminus A_{n,k}| \leq P_{k-2}(n)$  se cumple para algún polinomio  $P_{k-2}(x)$  en  $\mathbb{Z}[x]$  de grado  $k-2$  (cuyos coeficientes dependen de  $k$  pero no de  $n$ ). Para hacerlo, fijemos  $n \in \mathbb{N}$  y consideremos los siguientes dos conjuntos:

1.  $S_{=k+1} := \{S \in S_{n,k} \mid S = A + B \text{ para algunos } A, B \in \mathcal{P}_{\text{fin},0}(\mathbb{N}_0)^\bullet \text{ con } |A| + |B| = k + 1\}$ , y
2.  $S_{<k+1} := \{S \in S_{n,k} \mid S = A + B \text{ para algunos } A, B \in \mathcal{P}_{\text{fin},0}(\mathbb{N}_0)^\bullet \text{ con } |A| + |B| < k + 1\}$ .

A la raíz de la parte (1) del Lema 5.2, si  $S = A + B$  para algunos  $A, B \in \mathcal{P}_{\text{fin},0}(\mathbb{N}_0)^\bullet$ , entonces  $k + 1 \geq |A| + |B|$ . Por lo tanto  $S_{n,k} \setminus A_{n,k} = S_{=k+1} \cup S_{<k+1}$ . Procedemos a encontrar límites superiores tanto para  $|S_{=k+1}|$  como para  $|S_{<k+1}|$  y, por lo tanto, para  $|S_{n,k} \setminus A_{n,k}|$ .

Para encontrar un límite superior para el tamaño de  $S_{=k+1}$ , fijemos  $S \in S_{=k+1}$  y escribamos  $S = A + B$  para algunos  $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)^\bullet$  tal que  $|S| = k = |A| + |B| - 1$ . Por lo tanto, sigue de la parte (2) del Lema 5.2, que  $A = c \llbracket 0, |A| - 1 \rrbracket$  y  $B = c \llbracket 0, |B| - 1 \rrbracket$  para algún  $c \in \mathbb{N}$ , en cuyo caso,  $S = A + B = c \llbracket 0, k - 1 \rrbracket$ . Dado que  $\max S \leq n$ , vemos que  $c \in \llbracket 1, \frac{n}{k-1} \rrbracket$  y, como consecuencia,  $|S_{=k+1}| \leq \frac{n}{k-1}$ . Para encontrar un límite superior para el tamaño de  $S_{<k+1}$ , consideremos el siguiente conjunto:

$$Q_{n,k+1} := \{(A, B) \mid A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)^\bullet \text{ y } A + B \in S_{<k+1}\}.$$

Para cualquier  $S \in S_{<k+1}$ , existen conjuntos  $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)^\bullet$  tales que  $A + B = S$ ; es decir, existe un par  $(A, B) \in Q_{n,k+1}$  tal que  $A + B = S$ . Por lo tanto, la función

$Q_{n,k+1} \rightarrow S_{<k+1}$  definida a través de la asignación  $(A, B) \mapsto A + B$  es sobreyectiva, de donde  $|S_{<k+1}| \leq |Q_{n,k+1}|$ . Para encontrar un límite superior en  $|Q_{n,k+1}|$ , lo ampliaremos a un conjunto aún más grande:

$$Q'_{n,k+1} := \{(A, B) \mid A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)^\bullet, |A| + |B| < k + 1 \text{ y } \max A, \max B \leq n\}.$$

Para ver que  $Q_{n,k+1} \subseteq Q'_{n,k+1}$ , tomemos  $(A, B) \in Q_{n,k+1}$ . Entonces  $A + B \in S_{<k+1}$ , y por lo tanto  $|A| + |B| < k + 1$ . Además,  $A + B \in S_{n,k}$ , lo que implica que  $\max A + \max B = \max(A + B) \leq n$  y, por lo tanto,  $\max A \leq n$  y  $\max B \leq n$ . Así,  $(A, B) \in Q'_{n,k+1}$ . Por lo tanto  $Q_{n,k+1} \subseteq Q'_{n,k+1}$ , y cualquier límite superior para  $|Q'_{n,k+1}|$  también será un límite superior para  $|S_{<k+1}|$ . Dado  $i \in \mathbb{N}$  con  $i \geq 2$ , el número de formas de elegir un conjunto  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)^\bullet$  con  $|A| = i$  y  $\max A \leq n$  es  $\binom{n}{i-1}$ , por lo que inmediatamente obtenemos la siguiente expresión,

$$|Q'_{n,k+1}| = \sum_{\substack{i, j \geq 2 \\ i+j < k+1}} \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}. \quad (5.2)$$

donde primero elegimos los tamaños  $i$  y  $j$  y luego contamos el número de pares  $(A, B) \in Q'_{n,k+1}$  con  $|A| = i$  y  $|B| = j$ . Después de un cambio de variables obvio en la fórmula (5.2), podemos escribir

$$|Q'_{n,k+1}| = \sum_{\substack{i, j \geq 1 \\ i+j \leq k-2}} \binom{n}{i} \binom{n}{j} = \sum_{\substack{i, j \geq 1 \\ i+j \leq k-2}} \frac{n(n-1) \cdots (n-i+1) \cdot n(n-1) \cdots (n-j+1)}{i! \cdot j!}. \quad (5.3)$$

Observe que la expresión más a la derecha en (5.3) es un polinomio en  $n$  de grado  $i + j$ , que está garantizado ser como máximo  $k - 2$ . Por lo tanto,  $|Q'_{n,k+1}|$  se puede expresar como un polinomio en  $n$  de grado como máximo  $k - 2$ . Ahora escribamos

$$P_{k-2}(x) = \sum_{\substack{i, j \geq 1 \\ i+j \leq k-2}} \binom{x}{i} \binom{x}{j},$$

donde el polinomio  $\binom{x}{i}$  se define como de costumbre (es decir, a través de la igualdad  $\binom{x}{i} i! = x(x-1) \cdots (x-i+1)$ ). Por lo tanto, hemos mostrado que  $|S_{<k+1}| \leq P_{k-2}(n)$ . Ahora podemos juntar los límites superiores que hemos encontrado para los tamaños de  $S_{=k+1}$  y  $S_{<k+1}$  para obtener un límite superior para el tamaño de  $S_{n,k} \setminus A_{n,k}$ :

$$|S_{n,k} \setminus A_{n,k}| \leq |S_{=k+1}| + |S_{<k+1}| \leq \frac{n}{k-1} + P_{k-2}(n).$$

Ya que  $k \geq 3$ , vemos que el polinomio  $\frac{x}{k-1}$  tiene grado  $1 \leq k - 2$ , y así  $P(x) := \frac{x}{k-1} + P_{k-2}(x)$  es un polinomio de grado como máximo  $k - 2$ . Finalmente, dado que

$P(n)$  es un límite superior para el número de no-átomos de  $\mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$  con elemento máximo a lo sumo  $n$ , obtenemos que

$$\left| 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{n,k}}{\binom{n}{k-1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_{n,k} \setminus A_{n,k}|}{\binom{n}{k-1}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{\binom{n}{k-1}} = 0,$$

donde la última igualdad sale del hecho de que  $P(x)$  es un polinomio de grado como máximo  $k-2$ , mientras que  $\binom{x}{k-1}$  es un polinomio de grado  $k-1$ . Por lo tanto  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{n,k} / \binom{n}{k-1} = 1$ , como se deseaba.  $\square$

### 5.3. Problemas Relacionados Adicionales

Aquí dejamos propuestas algunas preguntas relacionadas adicionales. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , definamos

$$A_n := \{A \in \mathcal{A}(\mathcal{P}(\mathbb{N}_0)) \mid \max A \leq n\},$$

y luego establezcamos  $\alpha_n := |A_n|$ . Es claro que  $\alpha_n = \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k}$ .

**Pregunta 5.4** *¿Se cumplirá la igualdad*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{2^n} = 1?$$

Ahora considere la variable aleatoria  $X_n: A_n \rightarrow \mathbb{N}_0$  definida por  $X_n(A) = |A|$ , con una función de masa de probabilidad dada por  $p_n(X_n = k) = \frac{|A_{n,k}|}{|A_n|}$  (claramente,  $\sum_{k \in \mathbb{N}_0} p(X_n = k) = 1$ ).

**Pregunta 5.5** *¿Cuál es el valor esperado de  $X_n$ ? ¿Podemos probar que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k \in \mathbb{N}_0} k \frac{|A_{n,k}|}{|A_n|} \right) = \frac{n}{2}?$$

#### 5.3.1. Extensión del algoritmo para calcular moléculas

Recordemos que una molécula en un monoide  $M$  es un elemento que tiene exactamente una factorización, o sea  $|\mathbf{Z}_M(x)| = 1$ . En esta sub-sección presentamos una pequeña modificación del algoritmo presentado antes, para calcular esta vez la distribución en forma de triángulo de Pascal de una separación del conjunto de moléculas del monoide potencia  $\mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$ , similar a la hecha anteriormente con el conjunto de átomos. Esto permitirá en el futuro hacer, con el conjunto de moléculas de monoides

potencia de monoides numéricos, un análisis similar al hecho en esta tesis para el conjunto de átomos. Para cualquier monoide numérico  $N$  definamos

$$M_{n,k}(N) := \{A \in \mathcal{M}(\mathcal{P}(N)) \mid \max A \leq n \text{ y } |A| = k\},$$

y  $\beta_{n,k}(N) = |M_{n,k}(N)|$ . Por simplicidad denotamos  $M_{n,k} := M_{n,k}(\mathbb{N}_0)$  y  $\beta_{n,k} = |M_{n,k}|$ . Al igual que en el caso anterior el algoritmo se divide en dos métodos, que dadas las pocas diferencias que tienen respecto a los anteriores, su complejidad temporal y espacial se asumirán las mismas, o sea  $O(n2^n)$  y  $O(2^n)$  respectivamente, donde  $n$  es el número de filas a calcular.

```

1  void calculate_molecules(int row_no)
2  {
3      int mx = 1LL << (row_no + 1);    // 2^(n + 1)
4      for(int x_1 = 3; x_1 < mx; x_1+=2)
5      {
6          if(factorizations_count[x_1] > 0) continue;
7          auto active_bits = get_active_bits(x_1);
8          for(int x_2 = x_1; ; x_2 +=2)
9          {
10             int result = 0; // x_1 +' x_2
11             for(int &b : active_bits)
12             {
13                 result |= (x_2 * (1LL << b)); // x_2 * 2^b
14             }
15             if(result >= mx)
16                 break;
17             factorizations_count[result] ++;
18         }
19     }
20 }

```

```

1  vector<int> get_beta_n(int row_no)
2  {
3      vector<int> n_k(row_no + 1);
4      for(int i = 1; i < (1LL << row_no); i ++)
5      {
6          int element = i * 2 + 1;
7          if(factorizations_count[element] <= 1)
8          {
9              n_k[__builtin_popcount(element) - 1] ++;
10         }
11     }
12     return n_k;
13 }

```

Recordemos que la entrada del algoritmo es el número de filas que queremos calcular, al que nos referimos por  $n$ . Notemos que la única diferencia respecto a

los algoritmos anteriores (salvo los nombres de los métodos), es el uso del array `factorizations_count` en lugar de `no_atom`. En este caso, lo que llevamos en vez de ser un arreglo que guarda si un elemento es o no un átomo, es un arreglo que tiene por cada elemento el número de factorizaciones del elemento (salvo de los átomos, para los cuales lleva el valor 0). El algoritmo se basa en el hecho de que en cada factorización de un elemento tiene que haber un átomo  $x_1$  que sea mínimo (considerando el monoide  $(\mathbb{N}_0, +')$  y el orden natural de  $\mathbb{N}_0$ ), por tanto al pasar por cada elemento  $x_2 \geq x_1$ , se adicionará uno al contador de factorizaciones de  $x_1 +' x_2$ . Concluimos que al final se tiene correctamente calculado el número de factorizaciones en el monoide  $(\mathbb{N}_0, +')$  de cada número impar en el rango  $\llbracket 1, 2^{n+1} - 1 \rrbracket$ . Luego para saber si un elemento es una molécula solo necesitamos preguntar si su número de factorizaciones es menor o igual que 1, exactamente como se hace en la línea 7 del segundo método.

La siguiente figura muestra las 10 primeras filas del triángulo hallado por el algoritmo.

```

      0
     0 1
    0 2 1
   0 3 3 0
  0 4 6 3 0
 0 5 10 9 4 0
0 6 15 18 14 1 0
0 7 21 33 34 10 0 0
0 8 28 54 68 42 9 0 0
0 9 36 81 124 103 51 9 0 0
0 10 45 117 208 223 169 61 4 0 0
    
```

Figura 5.2: Primeras 10 filas de  $\{\beta_{n,k}\}$ .

# Conclusiones y recomendaciones

En esta tesis se estudió satisfactoriamente el ascenso de ciertas propiedades atómicas de un monoide Puiseux a su monoide potencia. Se demostró que la propiedad de ser atómico asciende, siempre que se imponga la existencia de divisores comunes maximales al monoide de Puiseux en cuestión. Además, se encontró un contraejemplo que demuestra que en el caso general la atomicidad no asciende. Se demostró también que las propiedades de factorización finita, factorización acotada y la condición de cadena ascendente de ideales principales sí ascienden al monoide potencia desde un monoide de Puiseux. Se utilizó además el mismo contraejemplo visto antes para demostrar que la propiedad de factorización finita por longitud no asciende al monoide potencia de un monoide de Puiseux.

Se estudiaron también los átomos de los monoides potencia restringidos de monoides numéricos. En primer lugar se investigaron algunos elementos más fuertes que los átomos como los elementos primos y dos de sus generalizaciones más comunes: los átomos fuertes y los elementos primarios. De hecho se demostró que en los monoides potencia de monoides numéricos ninguno de estos elementos más fuertes que los átomos está presente. Luego se hizo un estudio sobre cierta distribución en forma triangular o escalonada de los átomos de estos monoides, demostrando que las diagonales hacia el sureste de este triángulo eventualmente consisten solo de ceros, y hacia el suroeste tienden de forma asintótica a las diagonales del triángulo de Pascal. Estos resultados se conjeturaron a partir de un algoritmo que se creó para hallar y mostrar las primeras  $n$  filas de dicha distribución de los átomos; del cual se demostró su correctitud y complejidad temporal y espacial.

Finalmente, se extendió el algoritmo para enmarcar también el conjunto de moléculas de estos monoides, con el objetivo de que se pueda utilizar para futuras investigaciones. Se recomienda entonces hacer un estudio similar al realizado sobre la estructura atómica de los monoides potencia de monoides numéricos, pero enfocándose en la distribución de sus moléculas, igualmente en forma escalonada. Además, se dejaron ciertas preguntas interesantes que son un buen punto de partida para iniciar un trabajo que dé continuidad al realizado en esta tesis. Por último, una de las conjeturas que motivó el inicio de este trabajo es si la sucesión finita  $\{\alpha_{n,k}\}_{1 \leq k \leq n+1}$  es unimodal para cada  $n \in \mathbb{N}_0$ ; pregunta que sigue abierta y que recomendamos abordar

en futuros trabajos.

En conclusión, la investigación llevada a cabo fue satisfactoria pues se cumplieron todos los objetivos propuestos. Además, los resultados obtenidos son interesantes y están bien conectados con las investigaciones actuales que se están realizando en el contexto de la teoría de la factorización; pudiendo servir este trabajo para ampliar los conocimientos teóricos y prácticos que se tienen sobre el tema.

# Bibliografía

- [1] C. Liu , P. Rodríguez y M. Tirador: *Subatomicity in Rank 2 Lattice Monoids*, Journal of Commutative Algebra (por aparecer). Enlace a ArXiv: <https://arxiv.org/abs/2308.01459>
- [2] M. Gotti y M. Tirador: *On the Set of Molecules of Numerical and Puiseux Monoids*. En: Badawi, A., Coykendall, J. (eds) Rings, Monoids and Module Theory. AUS-ICMS 2020. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Vol. 382 (111-125). Springer, Singapore.
- [3] Khalid Ajran, Juliet Bringas, Bangzheng Li, Easton Singer y M. Tirador: *Factorization in additive monoids of evaluation polynomial semirings*, Communications in Algebra, Vol. 51:10 (2023) 4347-4362.
- [4] S. Albizu-Campos, J. Bringas y H. Polo: *On the atomic structure of exponential Puiseux monoids and semirings*, Communications in Algebra, 49:2, 850-863, 2021. DOI: 10.1080/00927872.2020.1820514
- [5] W. Narkiewicz: *Finite abelian groups and factorization problems*, Coll. Math., 42:319-330, 1979.
- [6] L. Carlitz: *A characterization of algebraic number fields with class number two*, Proc. Amer. Math Soc., **11** (1960) 391–392.
- [7] D. F. Anderson: *Robert Gilmers work on semigroup rings*, páginas 21-37. Springer, Boston, 2006.
- [8] D. D. Anderson y A. M. Frazier: *On a general theory of factorization in integral domains*, Rocky Mountain J. Math., 41:663-705, 2011.
- [9] A. Geroldinger y F. Halter-Koch: *Non-Unique Factorizations: Algebraic, Combinatorial and Analytic Theory*, Pure and Applied Mathematics, vol. 278, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2006.

- [10] C. Bowles, S. T. Chapman, N. Kaplan y D. Reiser: *On delta sets of numerical monoids*, J. Algebra Appl. 5(05): 695–718, 2006.
- [11] S. T. Chapman, M. Holden y T. Moore: *Full elasticity in atomic monoids and integral domains*, Rocky Mountain J. Math. 36: 1437–1455, 2006.
- [12] S. T. Chapman, F. Gotti, y M. Gotti, *Factorization invariants of Puiseux monoids generated by geometric sequences*, Comm. Algebra **48** (2020) 380–396.
- [13] F. Gotti :*Systems of sets of lengths of Puiseux monoids*, Journal of Pure and Applied Algebra, Vol. 223 (2019) 1856–1868.
- [14] V. A. Puiseux: *Recherches sur les fonctions algébriques*. Jour. de Math. 15: 365–480, 1850.
- [15] F. Gotti: *On the atomic structure of Puiseux monoids*, J. Algebra Appl. **16** (2017), 1750126.
- [16] A. Grams: *Atomic rings and the ascending chain condition for principal ideals*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **75** (1974), 321–329.
- [17] P. M. Cohn: *Bezout rings and and their subrings*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **64** (1968) 251–264.
- [18] D. D. Anderson, D. F. Anderson y M. Zafrullah: *Factorizations in integral domains*, J. Pure Appl. Algebra **69** (1990) 1–19.
- [19] R. Gilmer: *Commutative Semigroup Rings*, The University of Chicago Press, Chicago, 1984.
- [20] T. Tamura: *Isomorphism problem of power semigroups of completely 0-simple semigroups*, J. Algebra **98** (1986) 319–361.
- [21] H. Polo: *A characterization of finite factorization positive monoids*, Commun. Korean Math. Soc. **37** (2022) 669–679.
- [22] J. Coykendall y F. Gotti: *On the atomicity of monoid algebras*, J. Algebra **539** (2019) 138–151.
- [23] S. T. Chapman, F. Gotti, y M. Gotti: *When is a Puiseux monoid atomic?*, Amer. Math. Monthly **128** (2021) 302–321.
- [24] Y. Fan y S. Tringali: *Power monoids: A bridge between factorization theory and arithmetic combinatorics*, J. Algebra **512** (2018) 252–294.

- [25] P. Bienvenu y A. Geroldinger: *On algebraic properties of power monoids of numerical monoids*, Israel J. Math. (por aparecer). Enlace a arXiv: <https://arxiv.org/pdf/2205.00982.pdf>
- [26] S. Tringali y W. Yan: *A conjecture by Bienvenu and Geroldinger on power monoids*, Enlace a arXiv: <https://arxiv.org/abs/2310.17713>.
- [27] F. Gotti y H. Rabinovitz: *On the ascent of atomicity to one-dimensional monoid algebras* (Por aparecer) Enlace a arXiv: <https://arxiv.org/abs/2310.18712>
- [28] F. Gotti y B. Li: *Atomic semigroup rings and the ascending chain condition on principal ideals*, Proc. Amer. Math. Soc. **151** (2023) 2291–2302.
- [29] D. F. Anderson y F. Gotti: *Bounded and finite factorization domains*. In: Rings, Monoids, and Module Theory (Eds. A. Badawi and J. Coykendall) pp. 7–57. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Vol. **382**, Singapore, 2022.
- [30] A. Geroldinger y Q. Zhong: *Factorization theory in commutative monoids*, Semigroup Forum **100** (2020) 22–51.
- [31] A. A. Antoniou y S. Tringali: *On the arithmetic of power monoids and sumsets in cyclic groups*, Pacific J. Math. **312** (2021) 279–308.
- [32] A. Assi y P. A. García-Sánchez: *Numerical Semigroups and Applications*. New York: Springer-Verlag, 2016.
- [33] W. Bruns y J. Gubeladze: *Polytopes, Rings and K-theory*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Dordrecht, 2009.
- [34] P. A. García-Sánchez y J. C. Rosales: *Numerical Semigroups*, Developments in Mathematics, vol. 20, Springer-Verlag, New York, 2009.
- [35] F. Gotti y H. Polo: *On the arithmetic of polynomial semidomains*, Forum Mathematicum **35** (2023) 1179–1197.
- [36] H. Jiang, S. Kanungo, y H. Kim: *A weaker notion of the finite factorization property*. Communications of the Korean Mathematical Society (por aparecer). Enlace a arXiv: <https://arxiv.org/abs/2307.09645>.
- [37] J. E. Pin: *Power semigroups and related varieties of finite semigroups*. In: Semigroups and Their Applications (Eds. S.M. Gopherstein and P. M. Higgins) pp. 139–152. Proc. Int. Conf. “Algebraic Theory of Semigroups and Its Applications”, California State University at Chico, 1986.